

04 第四章

應學幾何

- 4-1 概說
- 4-2 認識尺度符號
- 4-3 等分線段、圓弧與角
- 4-4 垂直線與平行線
- 4-5 多邊形
- 4-6 相切與切線
- 4-7 圖形比例
- 4-8 圓錐曲線



4-1 概說

觀察日常生活中所見諸物體，其形狀皆由一種或數種幾何形體所構成。工程圖所表現的都是物體之形態，它們亦均為幾何圖形所構成。因此在工程圖中，常須應用幾何原理和幾何構圖來解決問題，故幾何圖形的作圖，在製圖中占極重要之地位。

4-2 認識尺度符號

一張工程圖除了幾何形狀之構成以表達物體形狀外，還必須加註尺度大小，而在標註尺度時，常必須由符號與數字併用。

尺度標註之符號

名稱	符號	標註例
直徑	ϕ	$\phi 30$
半徑	R	R12
方形	□	□12
球面直徑	S ϕ	S ϕ 25
球面半徑	SR	SR12
錐度		 1:5
斜度		 1:20
弧長		 23
板厚	t	t3



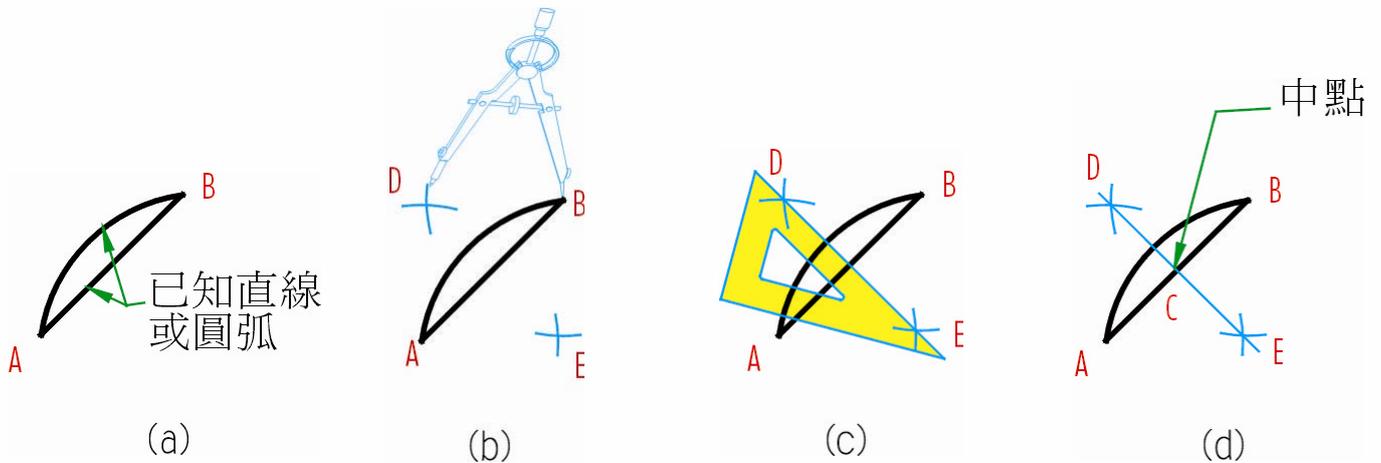
4-3 等分線段、圓弧與角

一、等分直線或圓弧

已知線段AB或圓弧AB，求作等分線段或圓弧。

【作法】

- 1、以直線或圓弧之兩端A、B各為圓心，大於AB線段（或圓弧）的一半長為半徑畫弧相交於D、E兩點。
- 2、以三角板連接D、E兩點與線段AB或圓弧AB交於C點。
- 3、C點即為平分直線或圓弧之中點。

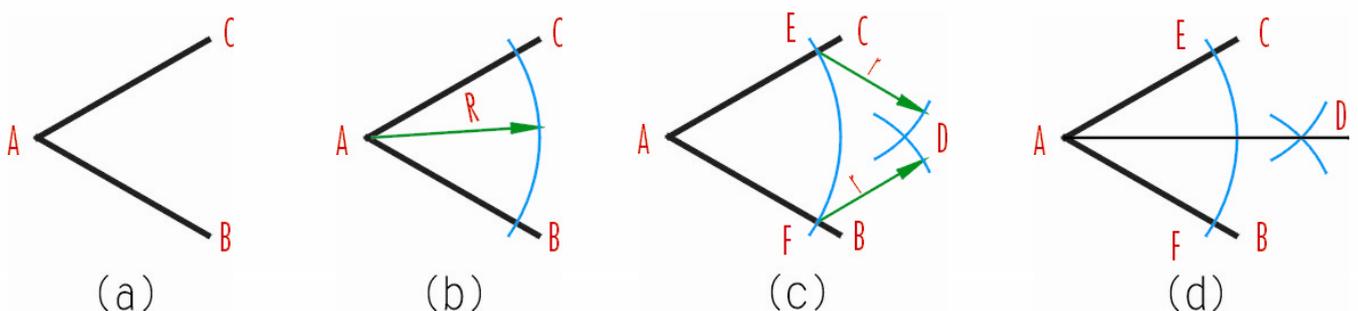


二、等分角度

已知 $\angle BAC$ ，求作 $\angle BAC$ 之分角線。

【作法】

- 1、以頂點A為圓心，適當長為半徑畫弧交夾角的兩邊於E及F。
- 2、再以E、F各為圓心，大於線段EF的一半長為半徑畫弧相交於D。
- 3、連接AD即為所求。

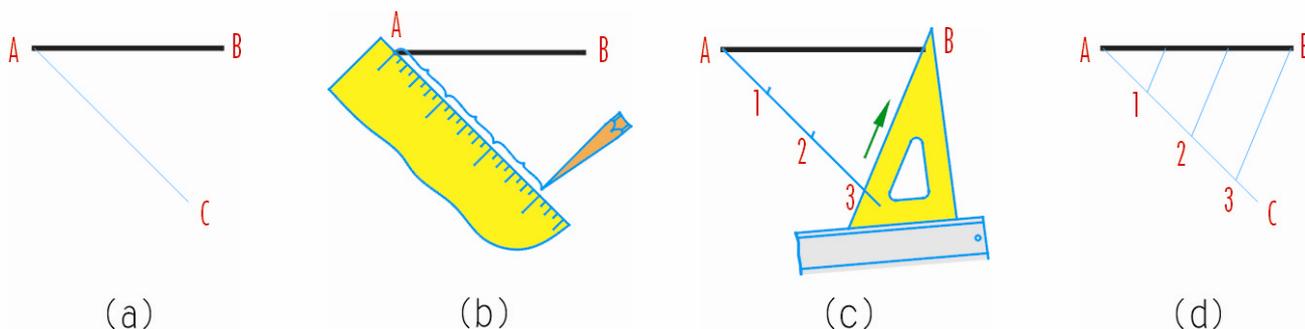


三、任意等分線段

已知線段AB，求作三等分線段AB。

【作法】

- 1、從已知直線A端引一任意角的直線AC。
- 2、用分規或直尺在AC直線上定出三個任意等長間距之分隔點1、2、3。
- 3、將最後分隔點3與B端連接。
- 4、通過其他分隔點1、2，畫與3-B線段平行之線即得。



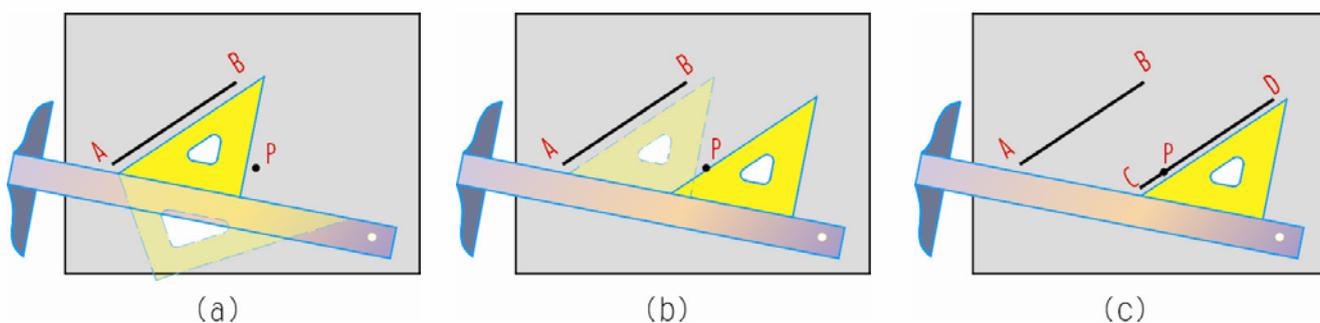
4-4 垂直線與平行線

一、過直線外一點P，畫該直線的平行線

已知線段AB及P點，求作一線段通過P點並平行線段AB。

【作法】

- 1、將三角板之任一邊與已知線AB對齊。
- 2、用丁字尺置於三角板下，按住丁字尺保持不動。
- 3、移動三角板至此邊正好過P點，沿此邊畫直線CD，即與已知線AB平行。

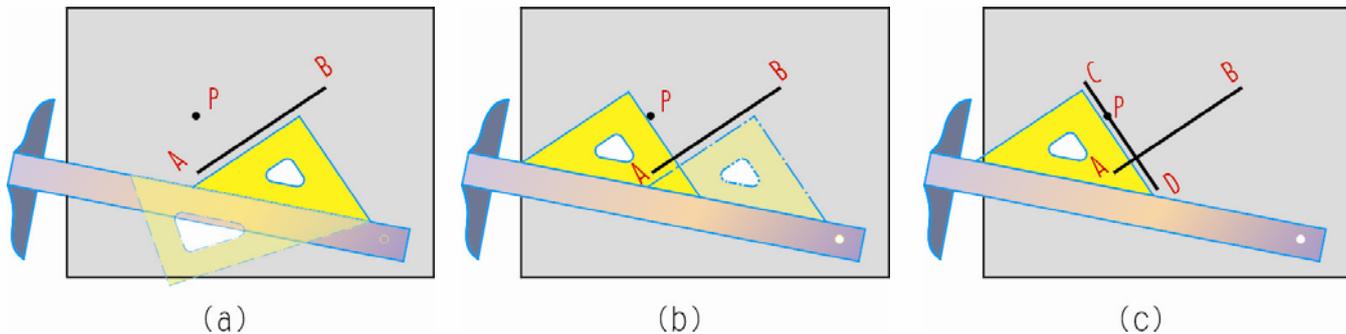


二、過直線外一點P，畫該線的垂直線

已知線段AB及P點，求作一線段通過P點並垂直於線段AB。

【作法】

- 1、將三角板的一腰與已知線AB對齊。
- 2、用丁字尺靠緊三角板之斜邊，並按住丁字尺。
- 3、移動三角板，至另一腰正好過P點，沿此腰畫線。



4-5 多邊形

以三條或三條以上直線所圍成之平面，即稱為多邊形（polygon）。此等直線稱為多邊形之邊，兩邊相交所夾稱為角。當多邊形其邊其角均相等者，即為正多邊形（r-

regular polygon）。正多邊形每一內角 $Q = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ 。

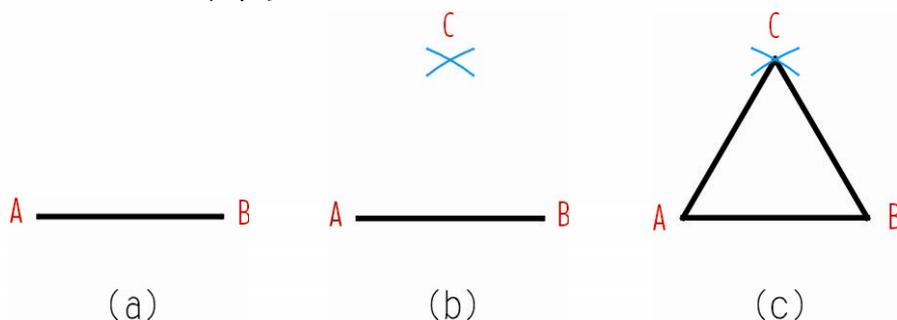
n為正多邊形之邊數，正多邊形之外角和為 360° 。

一、畫等邊三角形

已知邊長線段AB，求作一等邊三角形。

【作法】

- 1、各以線段AB之兩端為圓心，線段AB長為半徑畫弧相交於C。
- 2、連接AC、BC即得。

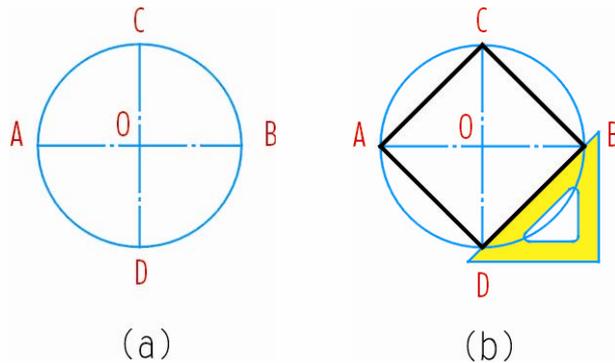


二、畫正四邊形

(一) 已知外接圓，求作正四邊形。

【作法】

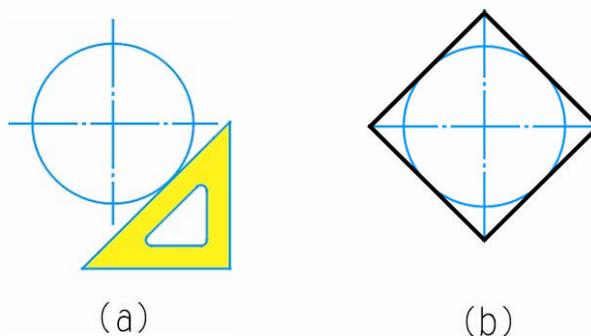
- 1、過圓心O畫水平及垂直兩直徑AB、CD。
- 2、連接A、B、C、D各點即得。



(二) 已知內切圓，求作正四邊形。

【作法】

- 1、用 45° 三角板配合丁字尺畫四條圓之切線即得。

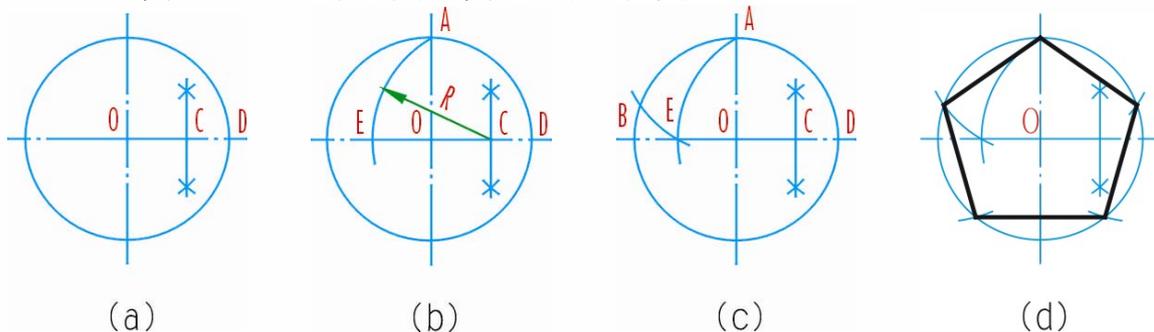


三、畫正五邊形

(一) 已知外接圓，求作正五邊形。

【作法】

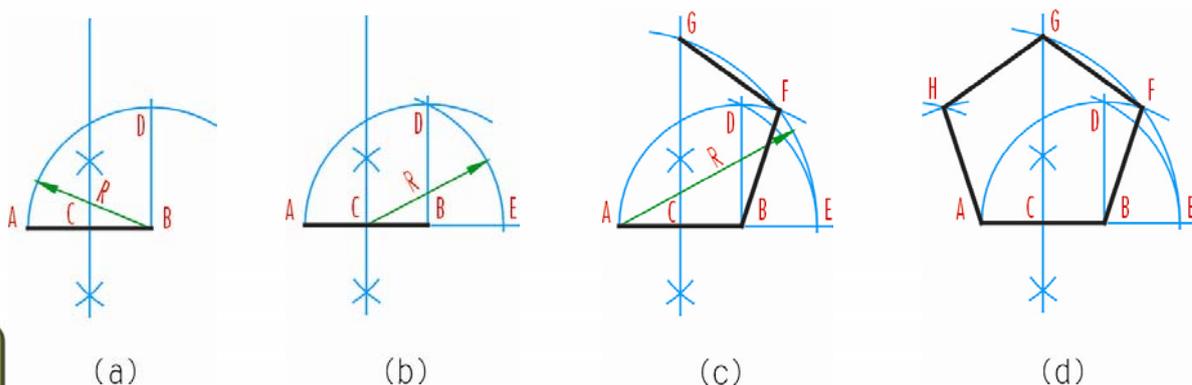
- 1、過圓心 O 作兩條互相垂直之直徑。
- 2、求半徑 OD 之中點 C 。
- 3、以 C 為圓心， CA 長為半徑畫弧交於 E 。
- 4、以 A 為圓心， AE 長為半徑畫弧交 O 圓周於 B 。
- 5、畫直線 AB ，即為所求正五邊形之一邊，以邊長分圓周為五等分，連結各等分點即得。



(二) 已知一邊長 AB ，求作正五邊形。

【作法】

- 1、平分已知邊 AB 得中點 C 。
- 2、以 B 為圓心， BA 長為半徑畫弧與 B 點垂線相交於 D 。
- 3、以 C 為圓心， CD 長為半徑畫弧與 AB 延長交於 E 。
- 4、以 A 為圓心， AE 長為半徑畫弧與 AF 弧及 AB 垂直平分線 GC 分別相交於 F 及 G 點。
- 5、連結 BF 、 FG 即為正五角形之兩邊。
- 6、以 A 、 G 各為圓心，正五邊形之一邊長為半徑畫弧相交於 H ，連結 GH 、 HA 即得。

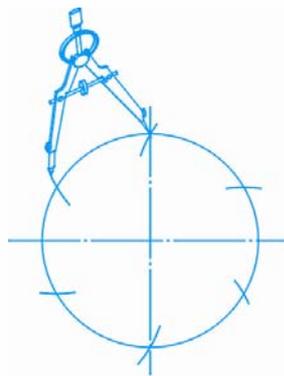


四、畫正六邊形

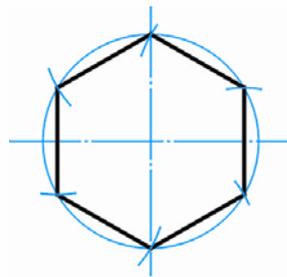
(一) 已知外接圓，求作正六邊形。

【作法】

- 1、用圓規量取圓半徑長，順次將圓周六等分。
- 2、連結各等分點即得。



(a)

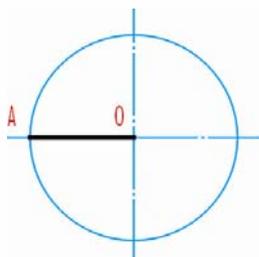


(b)

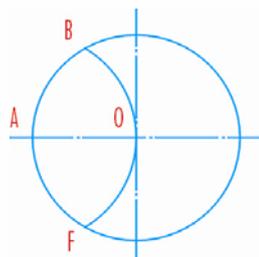
(二) 已知一邊長，求作正六邊形。

【作法】

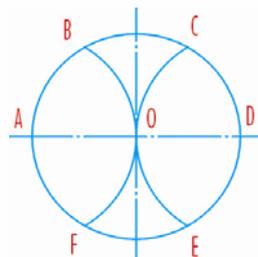
- 1、由已知邊長AO為半徑畫一正圓。
- 2、以A為圓心，半徑長不變畫弧交圓周於B、F兩點。
- 3、同樣再以D為圓心，畫弧交圓周於C、E兩點。
- 4、連結AB、BC、CD、DE、EF、FA即得。



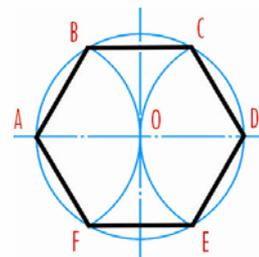
(a)



(b)



(c)



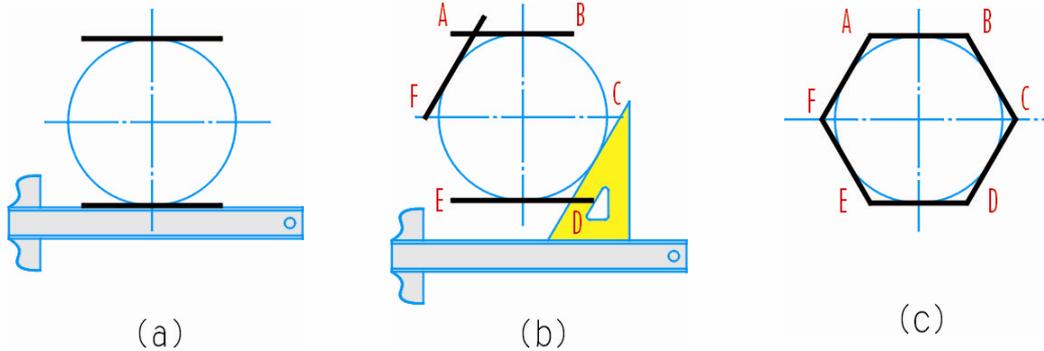
(d)



(三) 已知內切圓，求作正六邊形。

【作法】

- 1、用丁字尺畫圓之上下兩條水平線。
- 2、置 $30^\circ \times 60^\circ$ 三角板之短腰於丁字尺上，移動三角板之斜邊作圓的切線AF、CD、BC、EF即得。

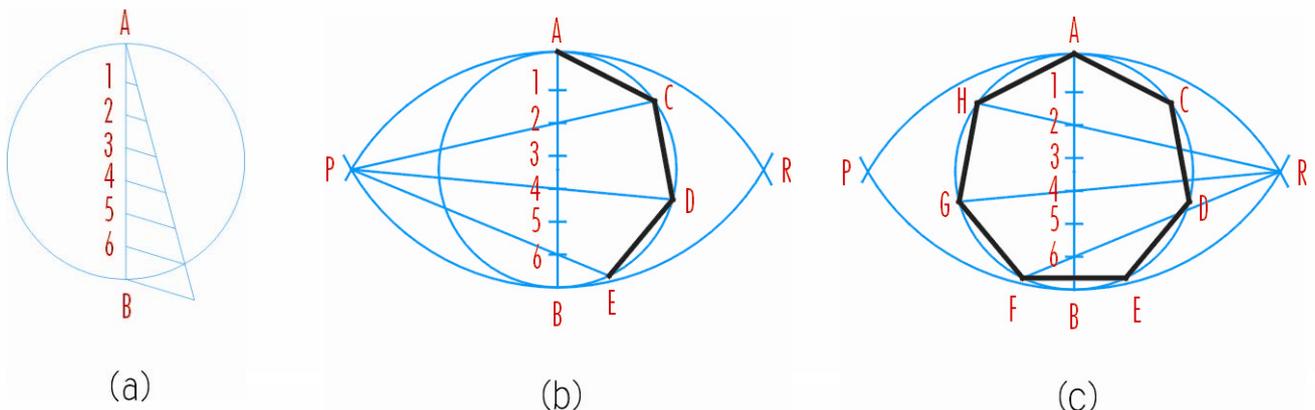


五、畫任意正多邊形（近似法）

(一) 已知外接圓，求作任意正多邊形。

【作法】

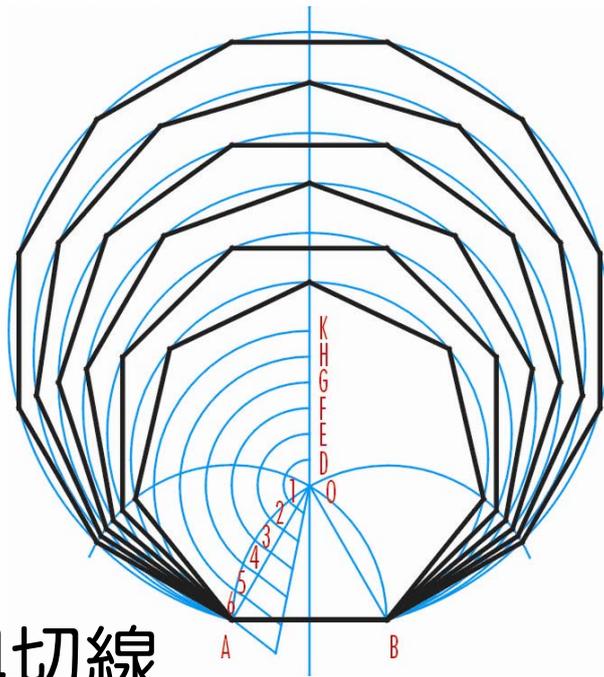
- 1、畫已知圓直徑AB。
- 2、將直徑AB七等分（隨要作幾邊形，就作幾等分）。
- 3、各以A、B為圓心，AB長為半徑畫圓弧相交於P、R兩點。
- 4、連結P2、P4、P6並延長之，交於圓上C、D、E各點。
- 5、連結R2、R4、R6並延長之，交於圓上H、G、F各點。
- 6、順次連結各點即得。



(二) 已知一邊長，求作任意正多邊形。

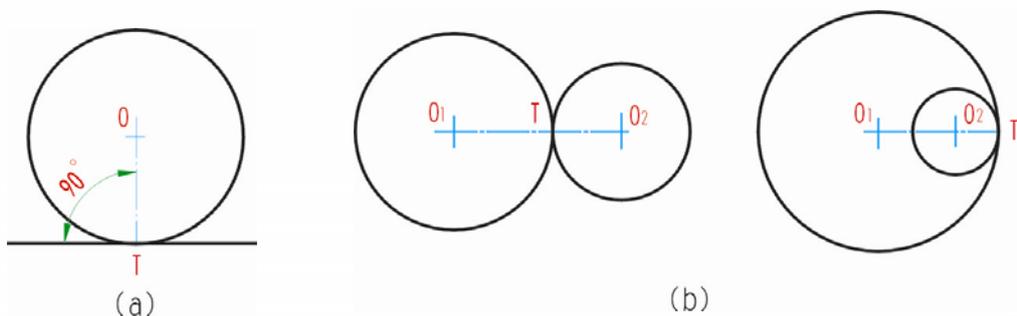
【作法】

- 1、由已知邊長畫一等邊三角形AOB。
- 2、等分AO或BO為六等分。
- 3、以O點為圓心，依次移轉 1、2、3... 各點至AB之垂直平分線上，得D、E、F...各點。
- 4、點D為正七邊形之外接圓中心，點E為正八邊形外接圓中心，...
- 5、以各外接圓中心至A或B點之距離為半徑畫外接圓。
- 6、取AB長等分圓弧後，連接各等分點即可畫出正多邊形。



4-6 相切與切線

當一圓弧與一直線相切，其切點（T）必位於經圓弧中心且垂直該直線之線上。兩圓相切，其切點（T）必位於兩圓心之連心線上或其延長線上；若兩圓為外切則其連心線長等於兩圓之半徑和；若兩圓為內切則其連心線長等於兩圓之半徑差。

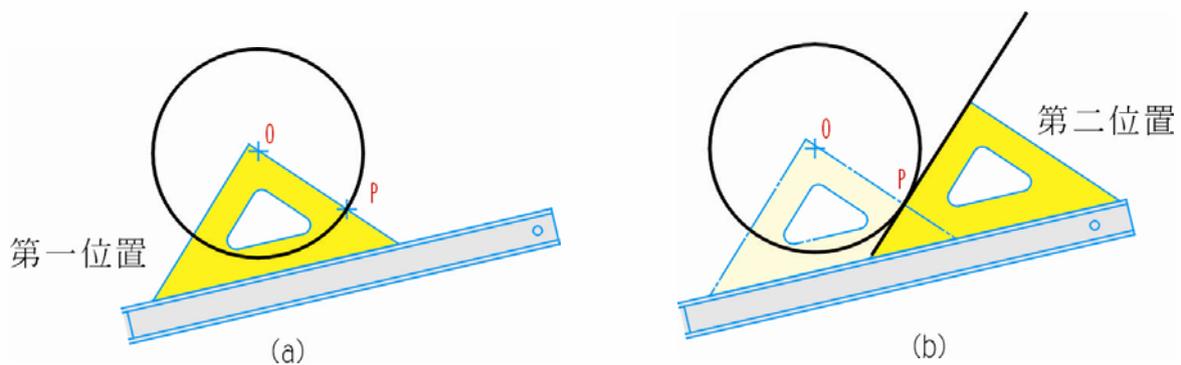


一、畫直線與圓相切

(一) 自圓上一點，求作一切線。

【作法】

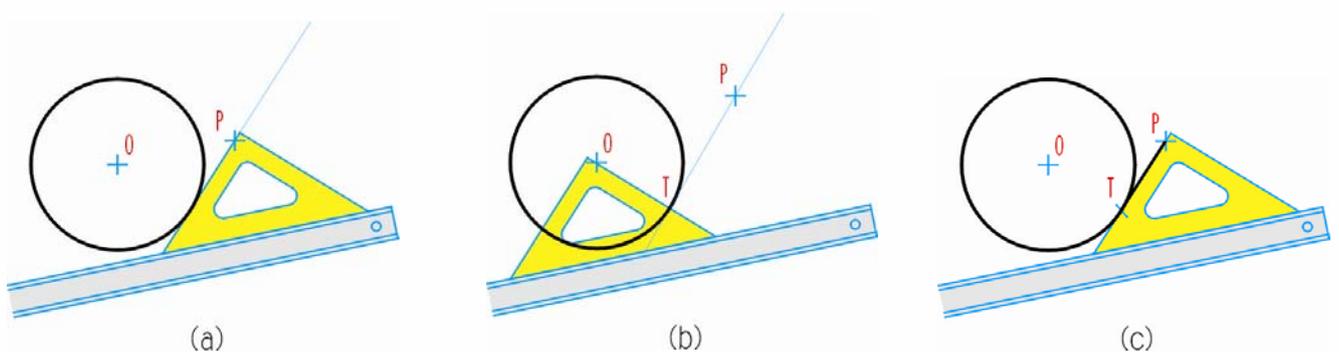
- 1、以三角板緊沿著丁字尺，使三角板之直角邊連結圓心及 P 點。
- 2、按住丁字尺，移動三角板，使另一直角邊通過 P 點，畫線即得。



(二) 自圓外一點，求作一切線。

【作法】

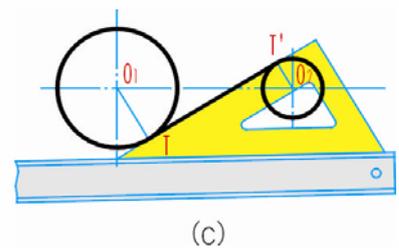
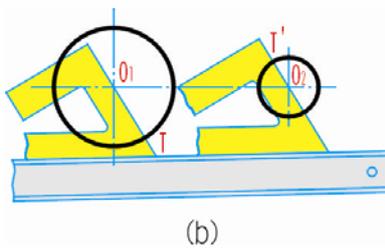
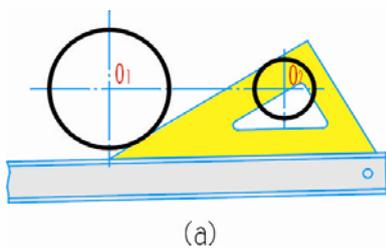
- 1、以三角板緊沿丁字尺，使其直角邊過 P 點且與圓相切。
- 2、按住丁字尺，移動三角板，使另一直角邊通過圓心與圓相交得切點 T 。
- 3、連接 PT 即得。



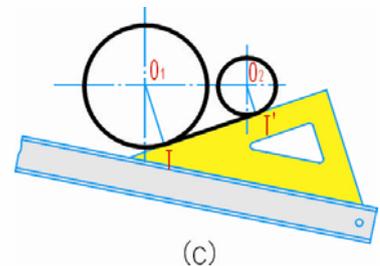
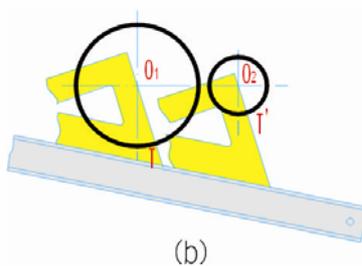
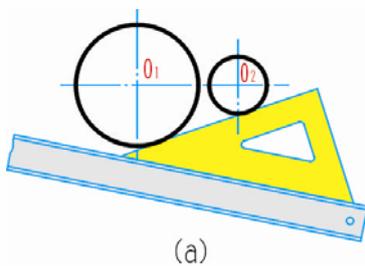
(三) 已知兩圓，求作其公切線。

【作法】

- 1、置三角板的一直角邊與兩圓相切。
- 2、用丁字尺與三角板的斜邊相靠。
- 3、按住丁字尺，移動三角板，使三角板之直角邊通過圓心 O_1 與 O_2 ，沿此直角邊作直線與圓周相交得切點 T 及 T' 。
- 4、連結 T 、 T' 兩切點即得公切線。



內公切線



外公切線

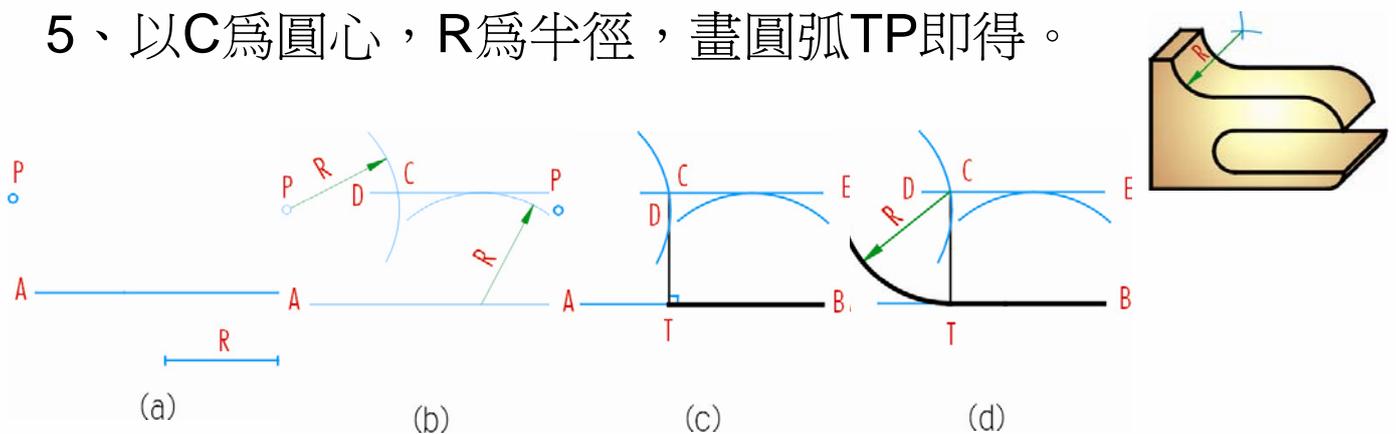


二、畫圓弧切於直線

(一) 已知圓弧半徑 R ，線段 AB 及線段外一點 P ，求作以半徑 R 畫一圓弧過 P 點並與線段 AB 相切。

【作法】

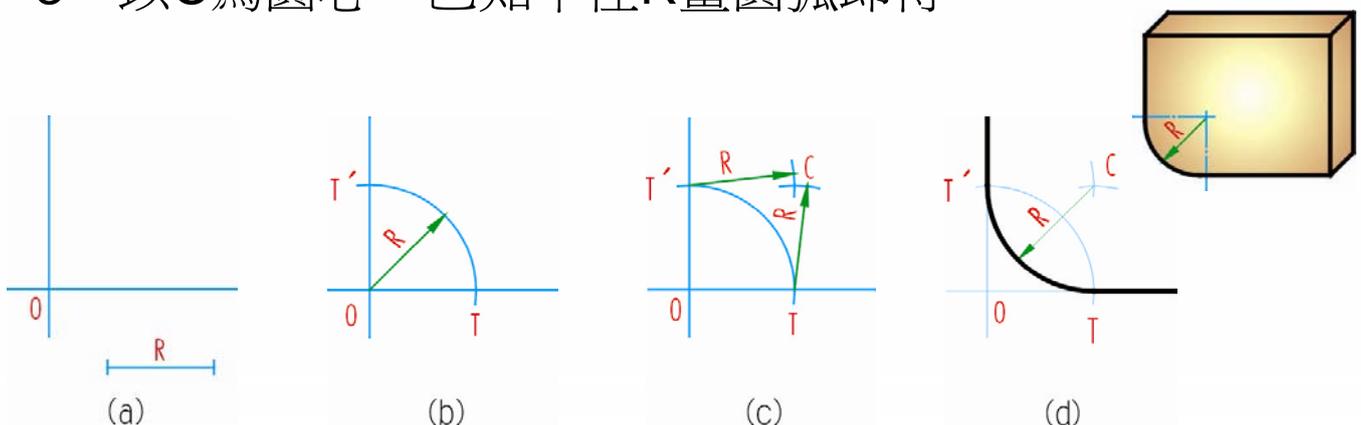
- 1、在 AB 線上適當位置取圓心，以已知圓弧半徑 R 作一圓弧。
- 2、作圓弧之切線 DE ，且平行直線 AB 。
- 3、以已知點 P 為圓心，已知半徑 R 畫弧，交切線 DE 於 C 。
- 4、由 C 作直線 AB 的垂線交 AB 於 T ， T 點即為切點。
- 5、以 C 為圓心， R 為半徑，畫圓弧 TP 即得。



(二) 已知圓弧半徑 R ，及成直角的兩直線，求作以半徑 R ，畫一圓弧與成直角的兩直線相切。

【作法】

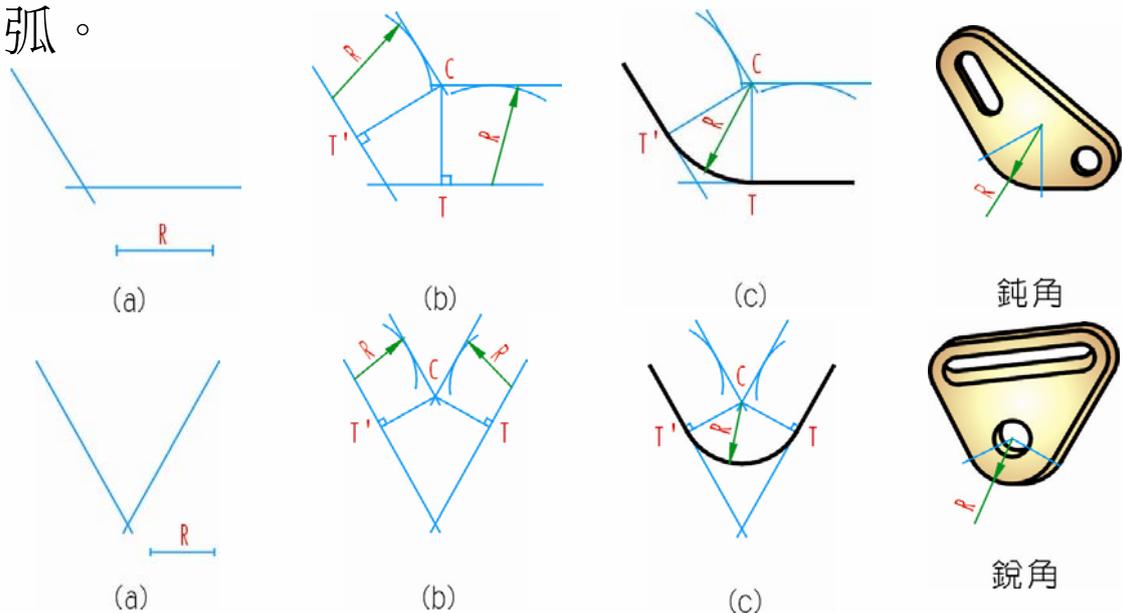
- 1、以兩直線之交點 O 為圓心，已知半徑 R 畫圓弧交兩直線於 T 、 T' ， T 、 T' 兩點即為切點。
- 2、各以 T 、 T' 為圓心，已知半徑 R 畫圓弧，相交於 C 。
- 3、以 C 為圓心，已知半徑 R 畫圓弧即得。



(三) 已知圓弧半徑 R ，及成銳角或鈍角的兩直線，求作以半徑 R ，畫一圓弧與成銳角或鈍角的兩直線相切。

【作法】

- 1、在兩相交直線上適當位置取圓心，以已知半徑 R 作兩圓弧。
- 2、作兩圓弧之切線且平行於兩直線，相交於 C 。
- 3、由 C 點作兩已知直線的垂線，得切點 T 、 T' 。
- 4、以 C 為圓心，用已知半徑 R 在兩切點間畫出所需的圓弧。



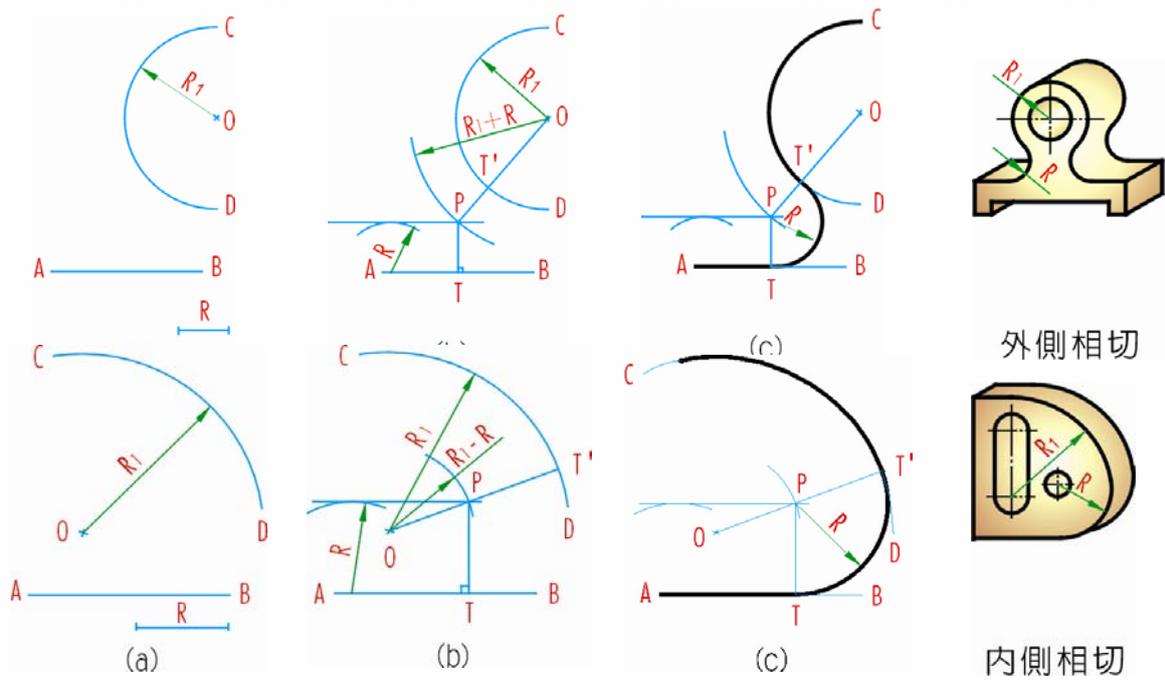
三、畫圓弧切於直線及圓弧

已知圓弧半徑 R ，及線段 AB 和圓弧 CD ，求作以半徑 R ，畫一圓弧與線段 AB 和圓弧 CD 相切。

【作法】

- 1、在 AB 直線上適當位置取圓心，以已知半徑 R 畫圓弧，並作切線且平行 AB 直線。
- 2、以圓弧 CD 之圓心 O 為圓心， $(R_1 + R)$ 或 $(R_1 - R)$ 的長為半徑畫圓弧交切線於 P 。（ $(R_1 + R)$ 為外側相切， $(R_1 - R)$ 為內側相切）
- 3、由 P 作直線 AB 之垂線得切點 T ，連結 PO 得切點 T' 。
- 4、以 P 為圓心，已知半徑 R 畫圓弧相切即得。



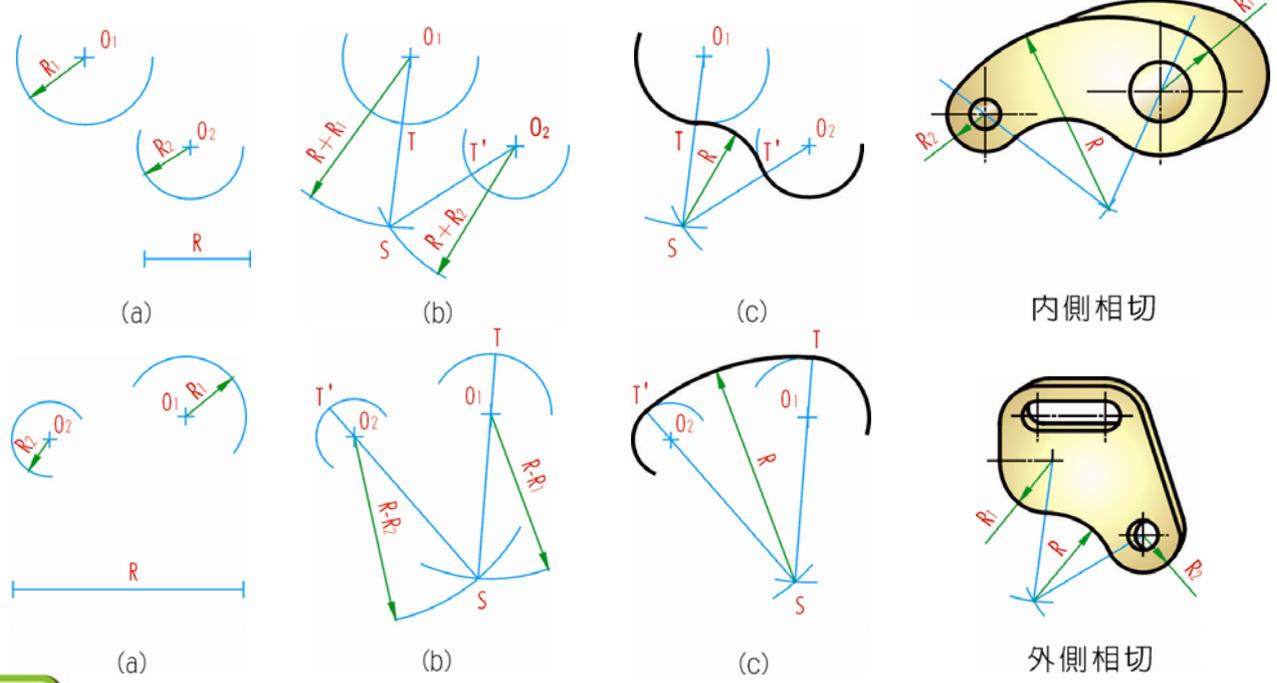


四、畫圓弧切於兩圓弧

已知圓弧半徑 R ，及圓弧 O_1 和圓弧 O_2 ，求作以半徑 R 畫一圓弧與兩已知圓弧相切。

【作法】

- 1、各以 O_1 、 O_2 為圓心，如為外側相切，以 $(R + R_1)$ 、 $(R + R_2)$ 的長為半徑，畫二圓弧相交於 S 。如為內側相切則以 $(R - R_1)$ 、 $(R - R_2)$ 為半徑畫圓弧相交。
- 2、連結 SO_1 得切點 T ，連結 SO_2 得切點 T' 。
- 3、以 S 為圓心，半徑 R 長畫圓弧相切即得。



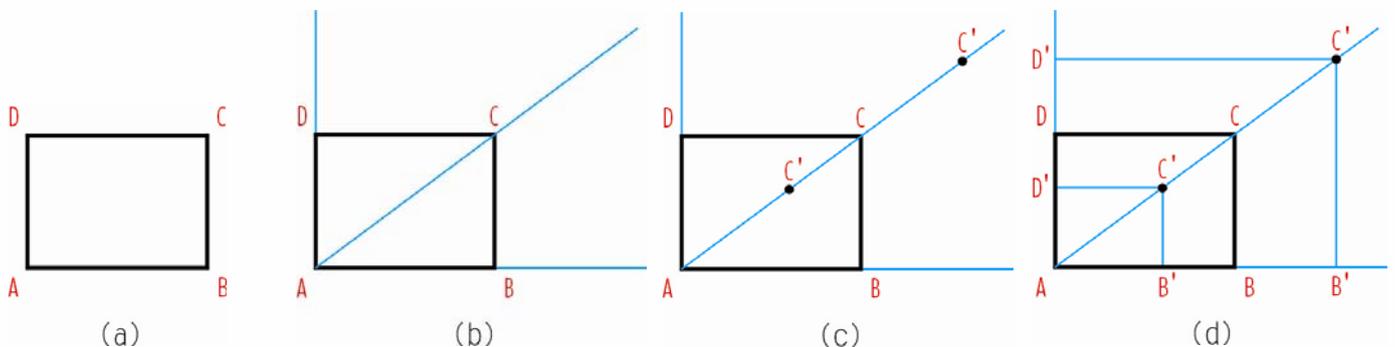
4-7 圖形比例

一、圖形的放大或縮小

(一) 對角線法。

【作法】

- 1、於原圖形編號。
- 2、以A點為基準畫水平與垂直兩座標軸，並連結AC對角線延長。
- 3、於對角線決定放大（或縮小）之比例點C'。
- 4、由決定比例之C'點畫C'B'平行CB，畫C'D'平行CD，而得放大（或縮小）圖形。

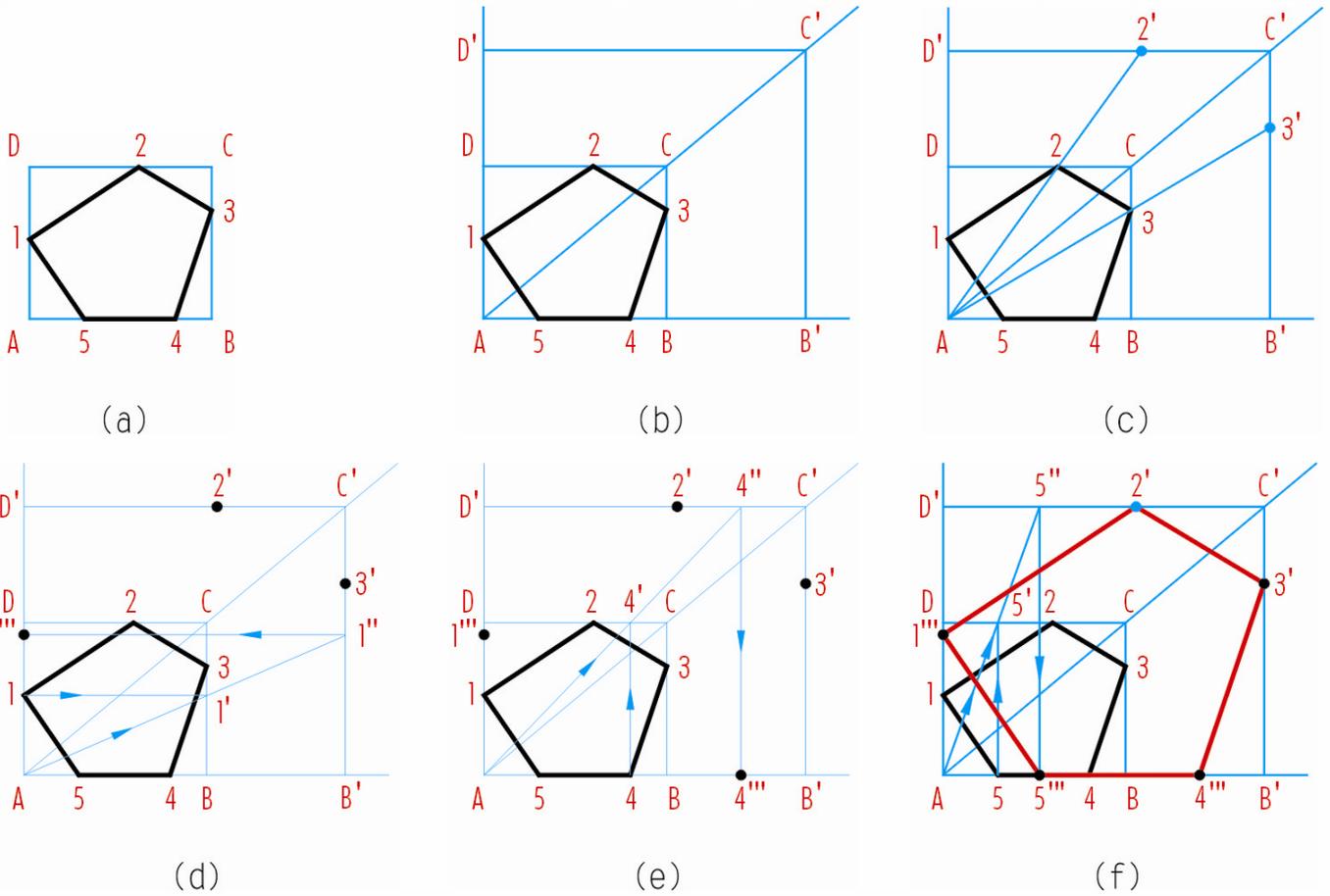


(二) 放射線法。

【作法】

- 1、於原圖形編號，並以方盒形框圍於原圖形。
- 2、利用前述之對角線法，決定要放大（或縮小）之比例大小。
- 3、點A與2、3連接並延長至放大之方盒形框，得2'、3'點。
- 4、點1水平投射到BC得1'點，然後由點A與1'連線並延長至C'B'得1''點，再由1''點水平投射至AD'得1'''點。
- 5、點4垂直投射到CD得4'點，然後由點A與4'連線並延長至C'D'得4''點，再由4''點垂直投射到AB'得4'''點。
- 6、得5'''之作法如同得點4一樣，然後將放大盒形框上之1'''、2'、3'、4'''、5'''分別連接，即為放大的圖形。縮小時亦同作法。



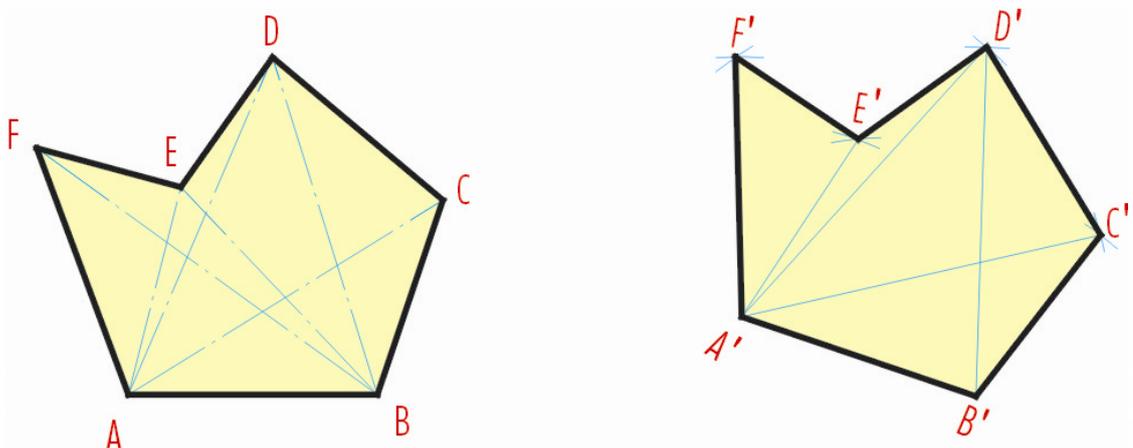


二、圖形之遷移

(一) 三角法：已知多邊形及新底邊之位置 $A'B'$ ，求作多邊形遷移至新位置。

【作法】

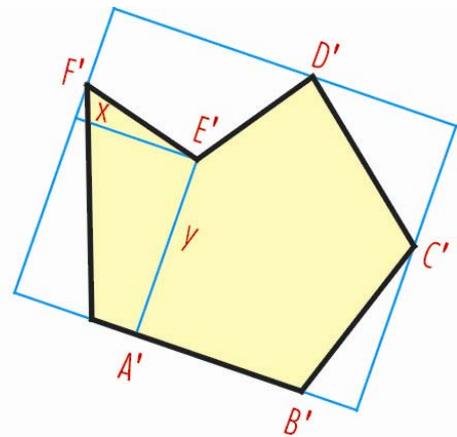
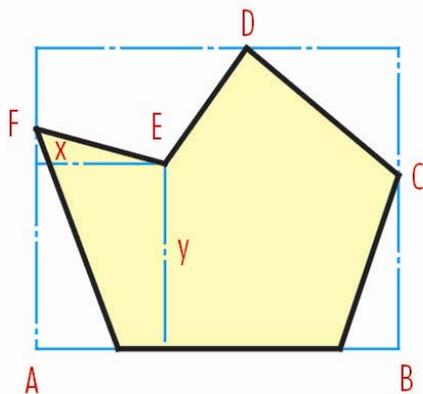
- 1、設多邊形各角點均為一以 AB 為底邊之三角形頂點。
- 2、以新底邊 $A'B'$ 之兩端為圓心， AC 與 BC 為半徑畫弧相交於 C' 。
- 3、同法求其餘新頂點位置，然後連結各頂點即得。



(二) 方盒法或支距法：已知多邊形及新底邊之位置A'B'，求作多邊形遷移至新位置。

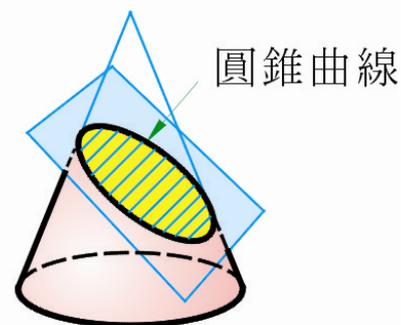
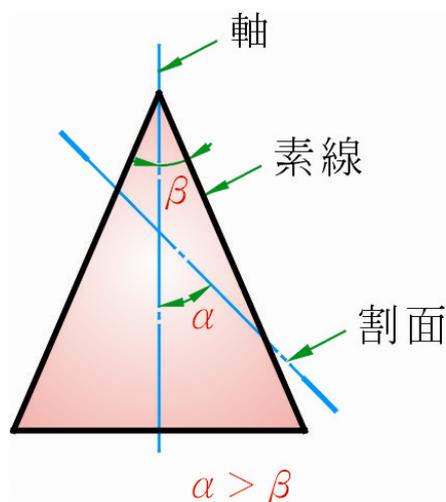
【作法】

- 1、將多邊形圍在一矩形中。
- 2、於新底邊上作同一大小之矩形。
- 3、將原來多邊形之頂點是在所作矩形邊上的，移量到新底邊上所作之矩形邊上。
- 4、不在矩形邊上的，以直角坐標法定出頂點位置。
- 5、連結新頂點的位置即得。

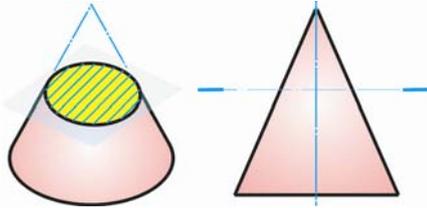
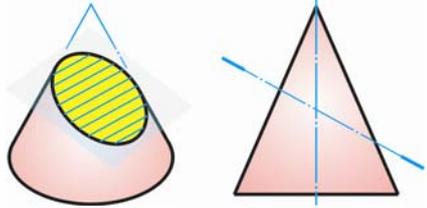
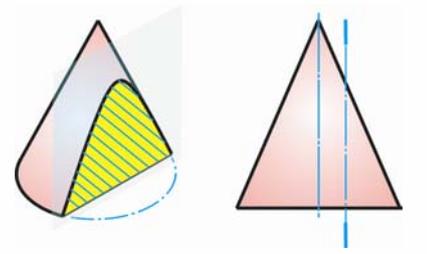
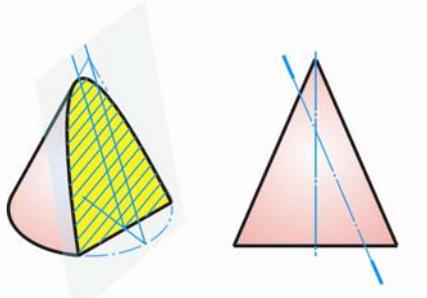


4-8 圓錐曲線

用一剖面截割一直立圓錐，其切割後之截面所形成之曲線，稱為圓錐曲線。



四種圓錐曲線

剖面切割直立圓錐之狀況	圖示	截面所形成之曲線
剖面垂直於軸		正圓
剖面與軸之夾角大於軸與素線之夾角		橢圓
剖面與軸之夾角小於軸與素線之夾角或剖面與軸平行		雙曲線
剖面與軸之夾角等於軸與素線之夾角或剖面平行素線		拋物線

一、圓

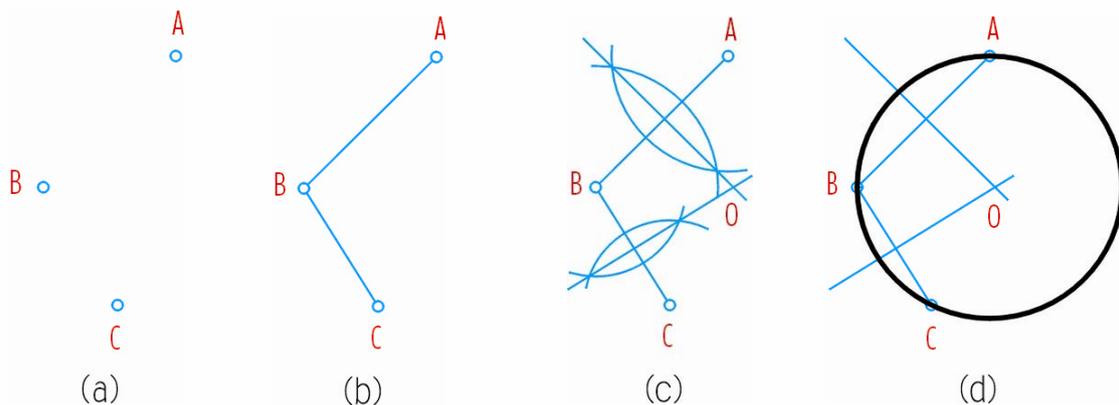
一動點繞一定點保持一定距離運動，則此動點之軌跡，謂之圓。不在一直線上的三點才可作一圓。



已知不在一直線上的三點A、B、C，求作一圓。

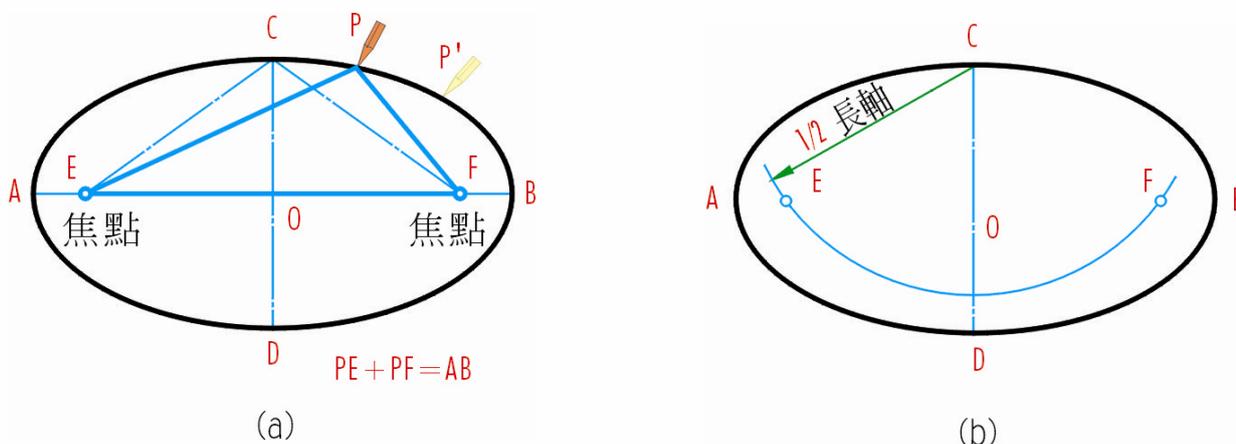
【作法】

- 1、先連接A-B，B-C得二直線。
- 2、分別求得A-B，B-C二線段的垂直平分線。
- 3、A-B，B-C二線段之垂直平分線相交點O，即為所要求的圓心。
- 4、以O為圓心，O-A（或O-B，O-C）為半徑畫圓即得。



二、橢圓

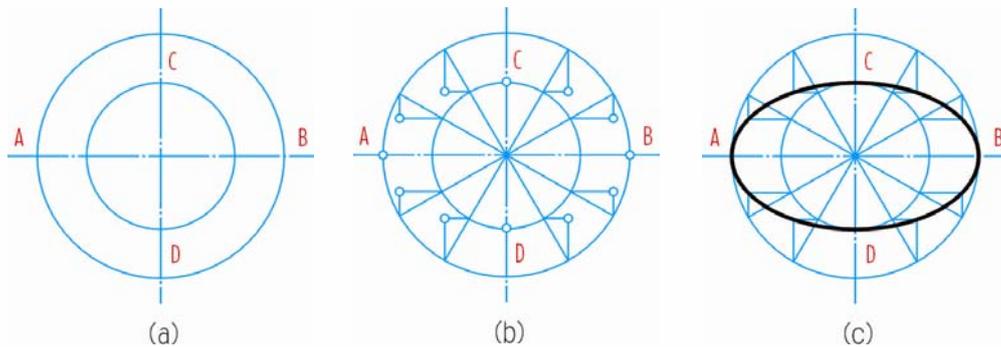
設一動點P與二定點（焦點）E及F間之距離的和為一常數，且恆等於其長軸AB，此動點P的軌跡，謂之橢圓。橢圓之焦點，是以短軸之一端為圓心，長軸之 $1/2$ 為半徑，畫弧與長軸相交之點即是。



(一) 同心圓法：已知橢圓之長軸**AB**及短軸**CD**，求作一橢圓。

【作法】

- 1、分別以**AB**及**CD**為直徑作同心圓。
- 2、將兩同心圓等分。
- 3、於等分線與小圓交點處畫水平線，與大圓交點處畫垂直線，由水平線與垂直線相交，得各交點。
- 4、以曲線板連接各交點即得橢圓。

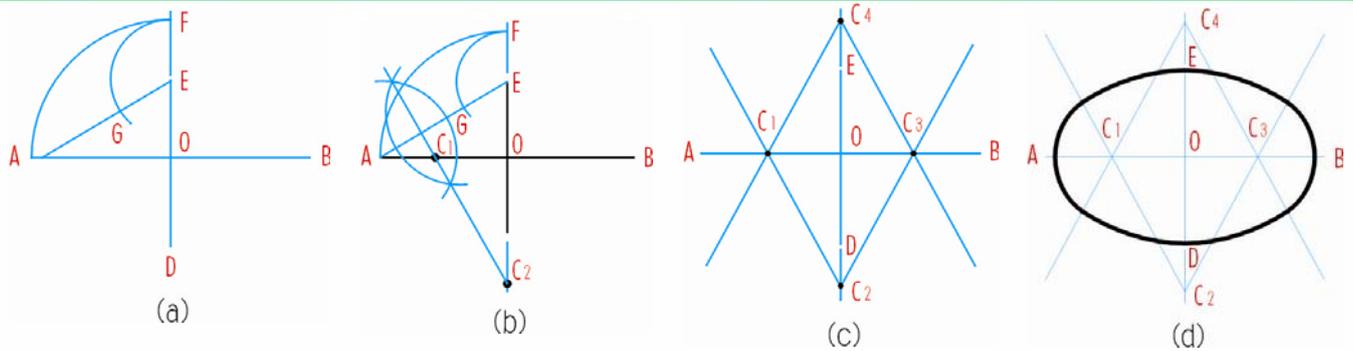


(二) 四圓心近似法：已知橢圓之長軸**AB**及短軸**DE**，求作一橢圓。

【作法】

- 1、連結**AE**，以**O**為圓心，**OA**長為半徑畫圓弧交**OE**之延長線於**F**。
- 2、以**E**為圓心，**EF**長為半徑畫圓弧交**AE**於**G**。
- 3、作**AG**直線之垂直平分線，則此平分線與軸相交得**C1**及**C2**點。
- 4、用分規取**OC1**之相同距離得點 **C3**，取 **OC2**之相同距離得點**C4**。
- 5、則**C1**、**C2**、**C3**、**C4**即為畫橢圓之四個圓心。
- 6、將**C1**、**C2**、**C3**、**C4**四個圓心互相連接。
- 7、分別以**C1**、**C2**、**C3**、**C4**為圓心，至**A**、**E**、**B**及**D**為半徑畫圓弧。
- 8、4 個圓弧可在**C1**、**C2**、**C3**、**C4**互相連線上相接切，而成一近似橢圓。

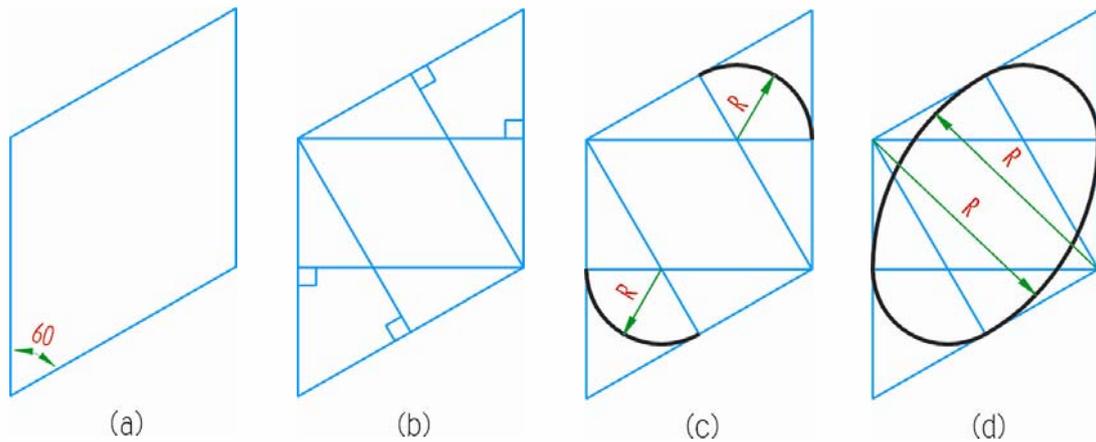




(三) 等角橢圓法：已知一 60° 菱形，求作一橢圓。

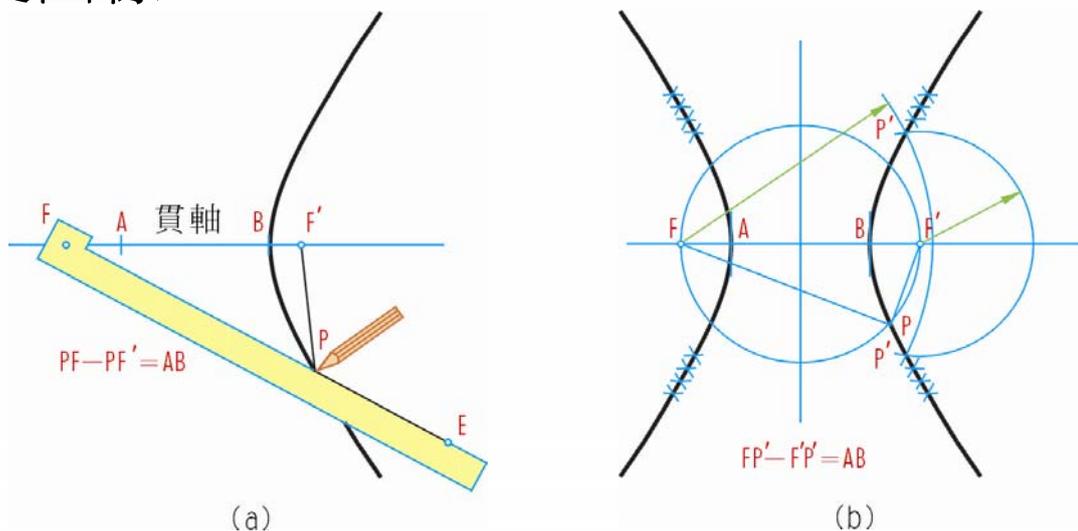
【作法】

- 1、作菱形各邊的中垂線，兩兩相交得交點為圓心。
- 2、自交點至各邊中點的距離為半徑分別作圓弧，合成橢圓。



三、雙曲線

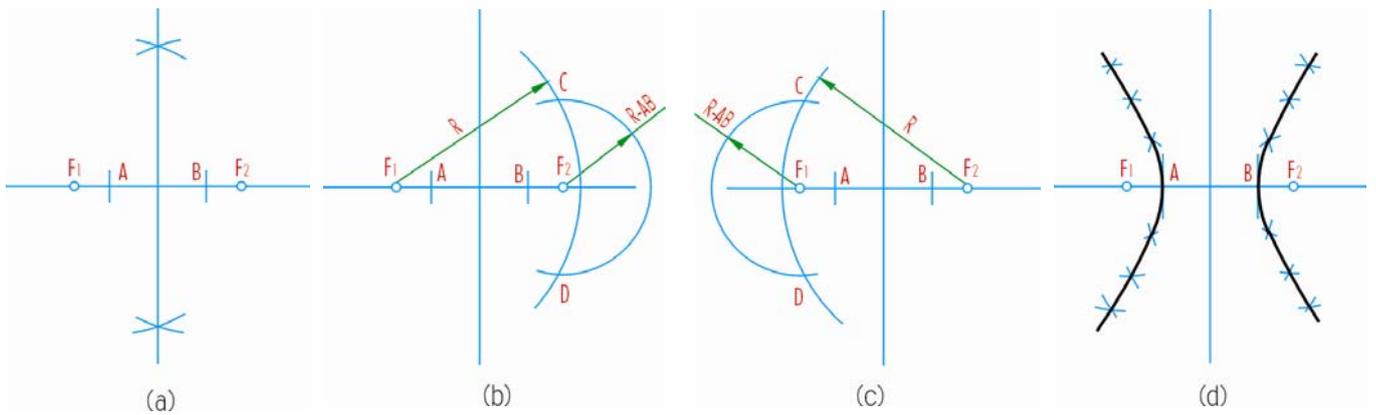
一動點在平面上移動，此動點與二定點（焦點）距離之差恆為常數，此動點所移動之軌跡為一對雙曲線。



(一) 焦點法：已知兩焦點 F_1 、 F_2 及貫軸 AB （定差），求作雙曲線。

【作法】

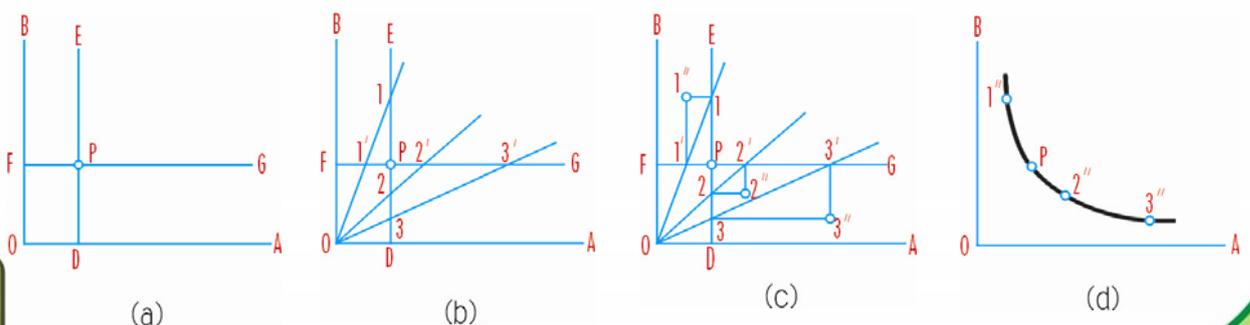
- 1、作貫軸 AB 之垂直平分線。
- 2、以 F_1 為圓心，任意大於線段 AB 之長為半徑（ R ）畫弧，再以 F_2 為圓心，（ $R-AB$ ）之長為半徑畫弧，而與前弧相交得 C 、 D 兩點。
- 3、以相同的方法再求諸多點，用曲線板連接即得。



(二) 等軸法：已知雙曲線之兩漸近線 OA 、 OB 及雙曲線上一點 P ，求作雙曲線

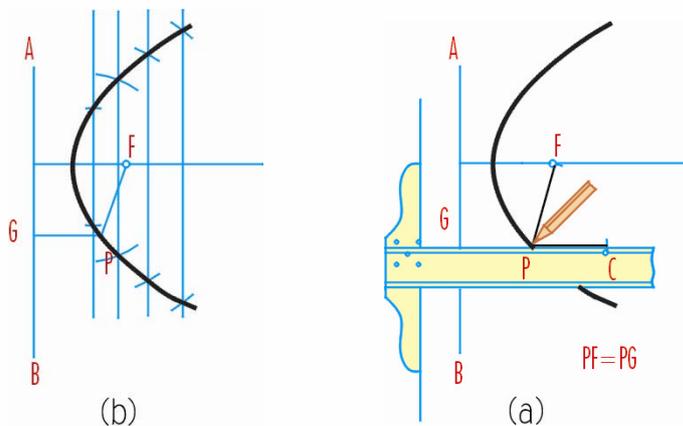
【作法】

- 1、過 P 點畫 FG 線平行 OA 線，畫 DE 線平行 OB 線。
- 2、由 O 點畫數條傾斜線（於此設畫三條）與 DE 線相交得 1 、 2 、 3 各點，與 FG 線相交得 $1'$ 、 $2'$ 、 $3'$ 各點。
- 3、由 1 、 2 、 3 各點畫與 OA 線之平行線， $1'$ 、 $2'$ 、 $3'$ 各點畫與 OB 線之平行線。
- 4、對應數字平行線之相交點，即為雙曲線上之點。（如點 3 之平行線與點 $3'$ 之平行線相交於點 $3''$ ）
- 5、連接諸多點即得雙曲線。



四、拋物線

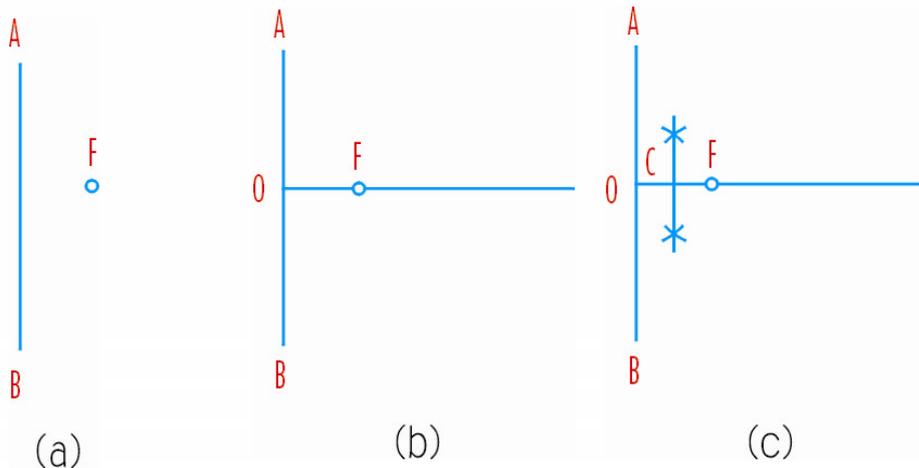
一動點在一平面上運動，此動點與一定點（焦點）之距離，恆等於動點至一直線（準線）之垂直距離，此動點移動之軌跡即為拋物線。

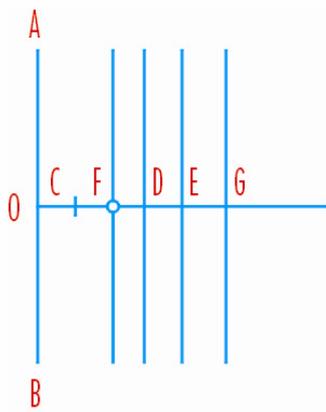


（一）焦點法：已知一焦點**F**及一準線**AB**，求作一拋物線。

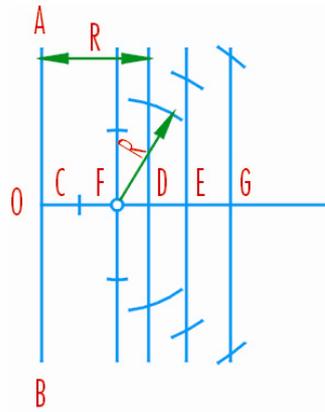
【作法】

- 1、過**F**點作**AB**線之垂線（拋物線之軸線）交於**O**。
- 2、平分**OF**線得中點**C**，即為拋物線頂點。
- 3、於拋物線之軸線（**OF**）取任意距離（如**D**、**E**、**G**...）並畫線平行於**AB**準線。
- 4、以**F**為圓心，量取各平行線至**AB**準線之距離為半徑**R**，畫弧與對應平行線相交之點，即為拋物線上的點。
（如取**D**平行線至**AB**線為半徑，畫弧時即與**D**平行線相交得點）
- 5、以相同方法，求得諸多點，以曲線板連接即得。

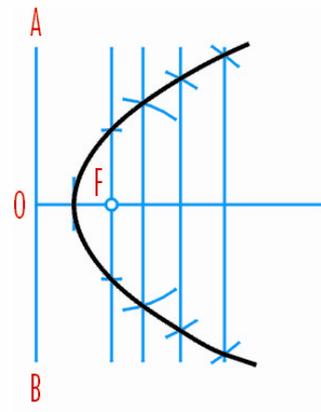




(d)



(e)

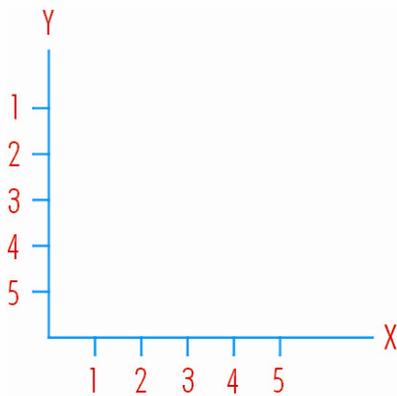


(f)

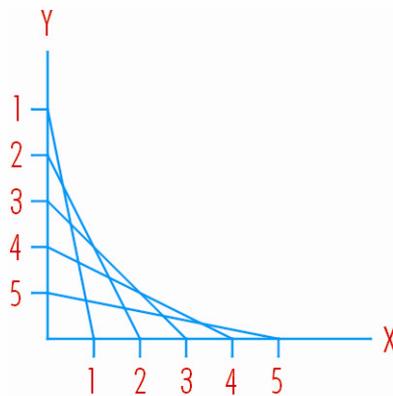
(二) 包絡線法：已知X軸與Y軸，求作拋物線。

【作法】

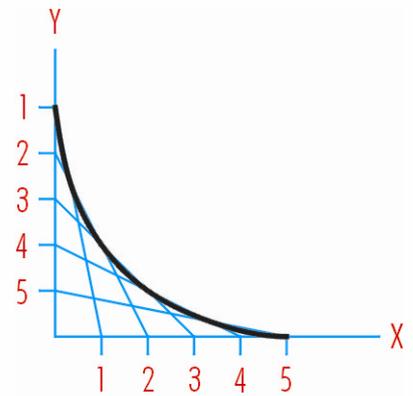
- 1、在X軸及Y軸上作相同之等分與編號（X軸編號由左向右，Y軸由上往下）。
- 2、以相同號碼點連接。
- 3、用曲線板畫曲線與各線段相切即得拋物線。



(a)



(b)



(c)

