第一章
光、影像、浮水印和抽樣原理

1

- 前言
- 光與顏色
- 人眼與照像機的關係
- 彩色模式的轉換
  - RGB, YIQ, HSV, HIS, YCbCr, and YUV
- 隱像術與浮水印（Image Hiding and Watermarking）
  - 影像的位元平面剖析
  - 隱像術的基本原理
- 人臉的定位應用
  - 形態學
  - 離散餘弦轉換
- 影像抽樣原理
  - 傅立葉轉換
  - 避免混疊效應

2

1.2 光與顏色

- 光(Light)是一種粒子波。人的眼睛只能看到可見光的部份，卻不能看見頻率(Frequency)低於可見光的紅外線和微波，也無法看見頻率高於可見光的紫外線和加瑪射線。
- 可見光：約在400~700nm之間
- 在影像處理中，像素的亮度(Brightness)和頻率的關係，如圖1.2.1所示。低頻率的紅光和高頻率的紫光的亮度都不如比較中間頻率的黃綠光來的強。
- 因此黃光常被使用作為道路反光標誌。

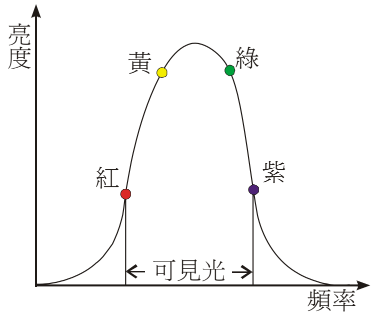
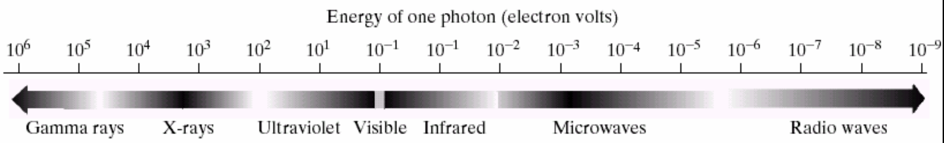


圖1.2.1 亮度與頻率的關係

- Electromagnetic (EM) wave spectrum used in image

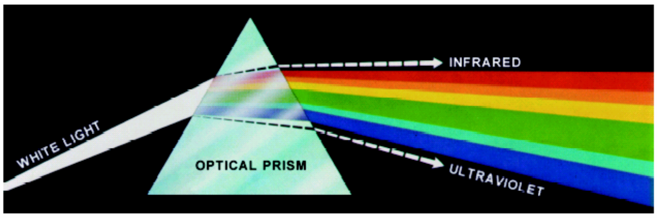


The electromagnetic spectrum arranged according to energy per photon.

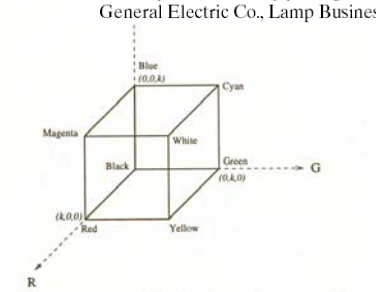
Band No.	Name	Wavelength (μm)	Characteristics and Uses
1	Visible blue	0.45–0.52	Maximum water penetration
2	Visible green	0.52–0.60	Good for measuring plant vigor
3	Visible red	0.63–0.69	Vegetation discrimination
4	Near infrared	0.76–0.90	Biomass and shoreline mapping
5	Middle infrared	1.55–1.75	Moisture content of soil and vegetation
6	Thermal infrared	10.4–12.5	Soil moisture; thermal mapping
7	Middle infrared	2.08–2.35	Mineral mapping

Light: Photometry and Colorimetry

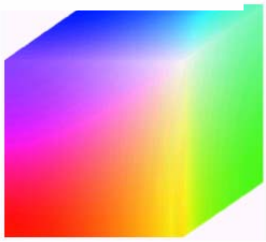
RGB Color Image Model



Color spectrum seen by passing white light through a prism. (Courtesy of the General Electric Co., Lamp Business Division.)

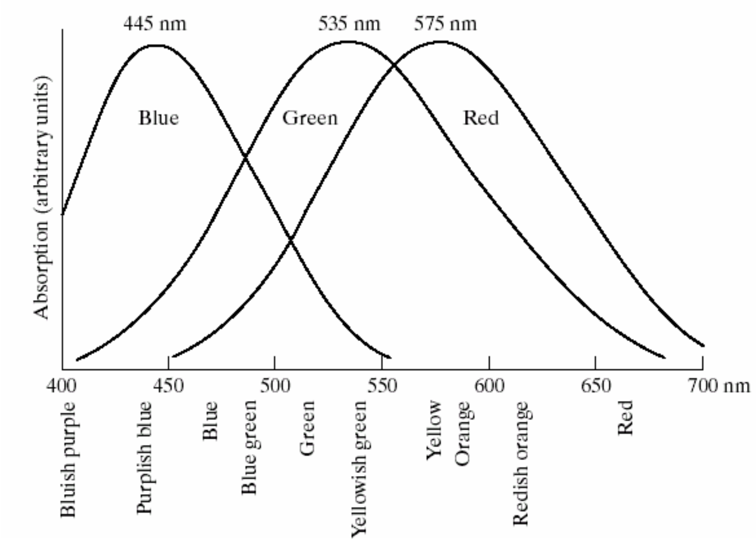


Color space co-ordinatized as red, green, blue.



RGB 24-bit color cube.

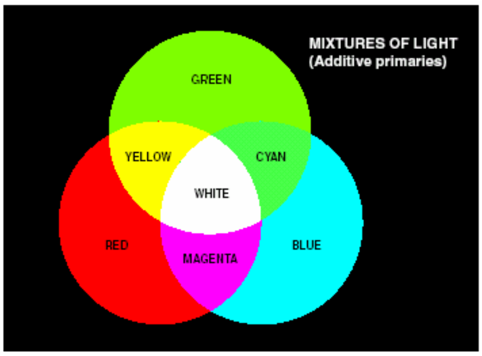
5



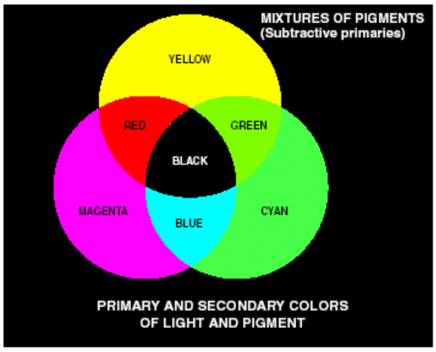
Color RGB is simple but correlation is high.

6

RGB Model



CMY or CMYK Model



Magenta：洋紅色
Cyan：青綠色

$$\begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

1.3 人眼與照像機成像

- 輸入影像很大的比例是由掃描器(Scanner)與 照像機(Camera)得。
- 瞳孔的功能像照像機的光圈（halo），用來調節進入人眼內部的光通量，光通量一般以流明(Luminance)為單位。

瞳孔（Pupil）：透明薄膜

視網膜（Retina）

水晶體（Lens）

眼角膜（Cornea）：透明薄膜

虹膜（Iris）：褐色圓形

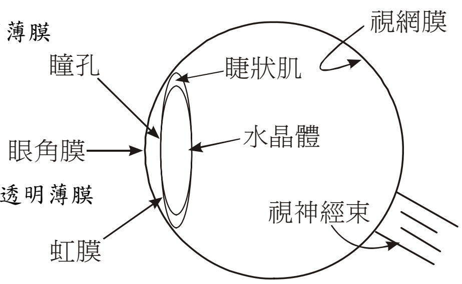


圖1.3.1　人眼示意圖

- 圖1.3.2為透鏡成像的中央投影(Central Projection)示意圖。圖中的f代表鏡頭的焦距；$f1$代表物距，$f2$而代表像距。f、$f1$和$f2$會滿足下列式子

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

EX：令$f_1 = 3$ cm和$f_2 = 6$ cm，求算f。

ANS：根據上式，我們得到

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \quad =\frac{1}{2}$$

所以$f = 2$ cm。

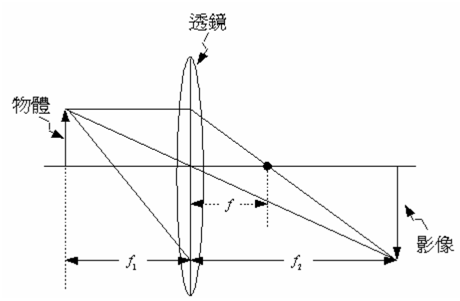


圖1.3.2　透鏡成像原理

Digital Images（成像）

Spatial Resolutions:

(a) 640X480; (b)320X240; (c)160X120; (d) 80x60; (e) 40X30; (f) 20X15.

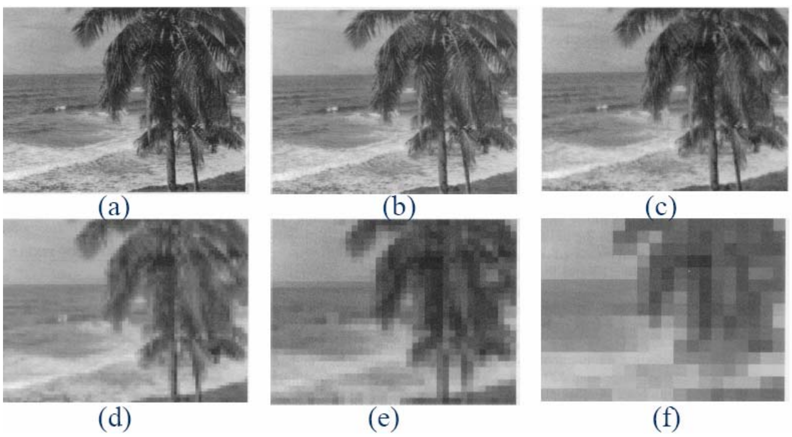


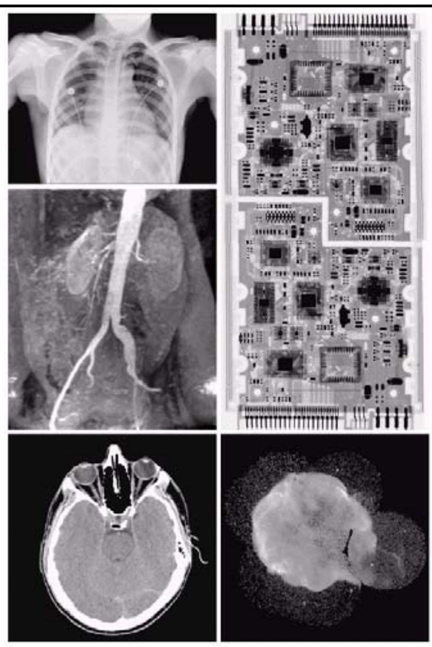
Image Files and Formats

Header
Color map
Image data

- Raw: The simplest format that only stores image data without header
- Bmp: Microsoft Bitmap format divided into three parts, header, color map, image data.
- Tif: Tagged Image File Format which supports different compression methods, multiple images per file, and binary, grayscale, true color, and indexed images
- Jpg: Images created using JPEG compression method
- Gif: Graphics Interchange Format
- Png: Portable Network Graphics
- TGA: Industry Format
- Mpg: Motion Pictures Expert Group (MPEG)

- X-Ray, CT（Computer Tomography；電腦斷層）, SPEC Images –

Nuclear medical SPEC Image of kidneys（腎臟）



a b c d e Examples of X-ray imaging. (a) Chest X-ray. (b) Aortic angiogram. (c) Head CT. (d) Circuit boards. (e) Cygnus Loop. (Images courtesy of (a) and (c) Dr. David R. Pickens, Dept. of Radiology & Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center, (b) Dr. Thomas R. Gest, Division of Anatomical Sciences, University of Michigan Medical School, (d) Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc., and (e) NASA.)

- Visible and Infrared Band Image --

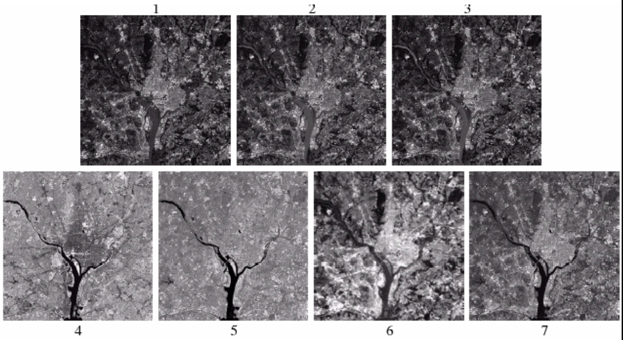
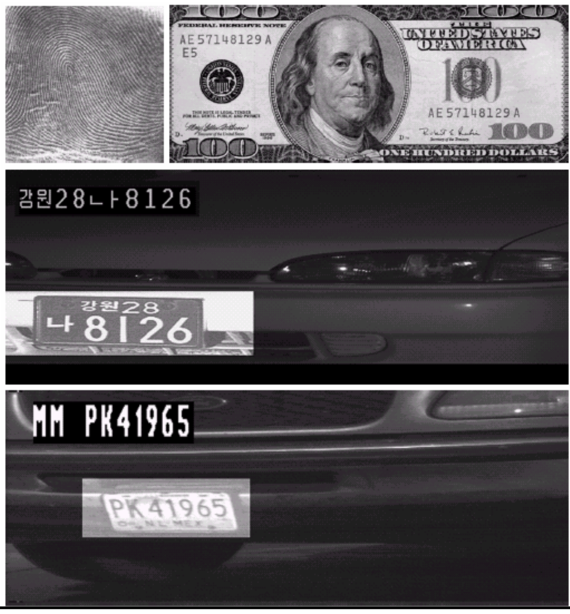


FIGURE LANDSAT satellite images of the Washington, D.C. area. The numbers refer to the thematic bands

FIGURE Multispectral image of Hurricane Andrew taken by NOAA GEOS (Geostationary Environmental Operational Satellite) sensors. (Courtesy of NOAA.)

13

- Visible Spectrum Images



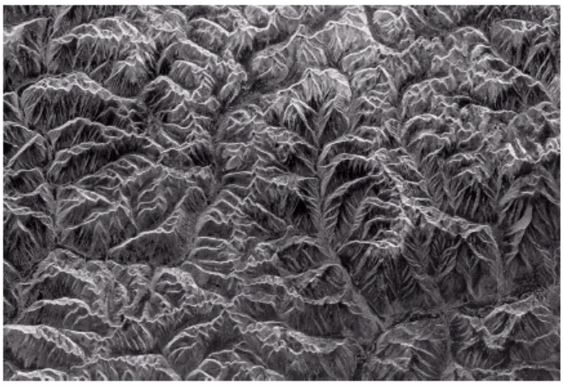
a b
c
d

FIGURE Some additional examples of imaging in the visual spectrum. (a) Thumb print. (b) Paper currency. (c) and (d). Automated license plate reading. (Figure (a) courtesy of the National Institute of Standards and Technology. Figures (c) and (d) courtesy of Dr. Juan Herrera, Perceptics Corporation.)

14

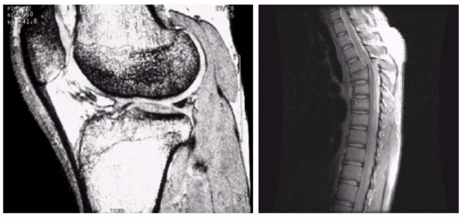
- Microwave Band Images

FIGURE
Spaceborne radar image of mountains in southeast Tibet. (Courtesy of NASA.)



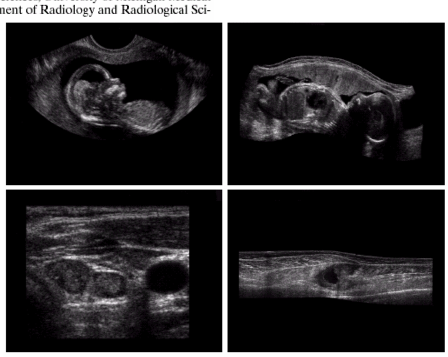
15

- Radio Band Images (MRI)



a b
MRI images of a human (a) knee, and (b) spine. (Image (a) courtesy of Dr. Thomas R. Gest, Division of Anatomical Sciences, University of Michigan Medical School, and (b) Dr. David R. Pickens, Department of Radiology and Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center.)

- Ultrasound Images



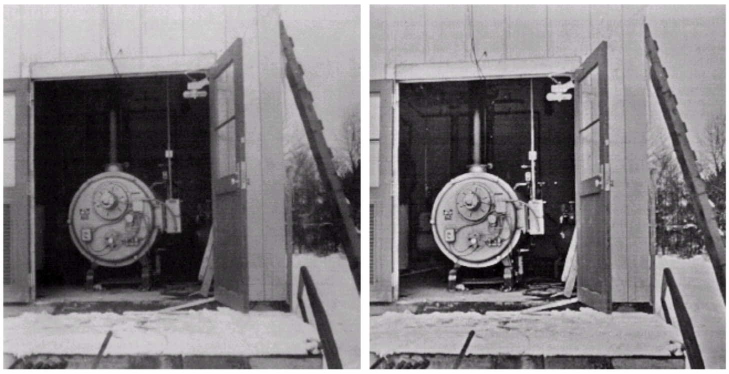
a b
c d
Examples of ultrasound imaging. (a) Baby. (2) Another view of baby. (c) Thyroids. (d) Muscle layers showing lesion. (Courtesy of Siemens Medical Systems, Inc., Ultrasound Group.)

16

Image improvement results: after enhancement

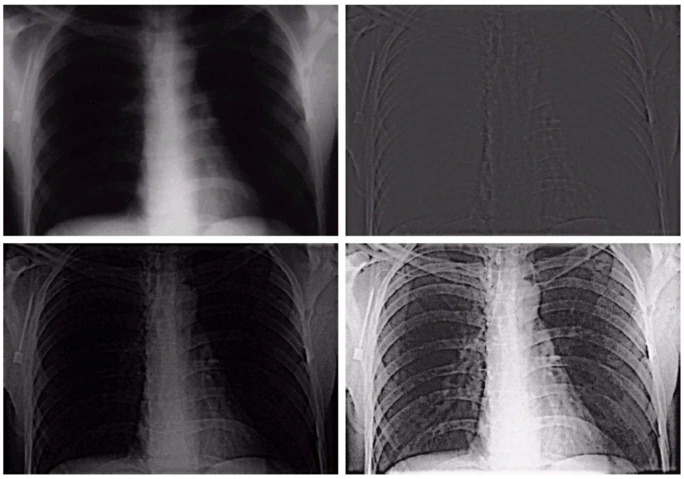
a b

(a) Original image. (b) Image processed by homomorphic filtering (note details inside shelter). (Stockham.)



17

Enhancement



a b
c d

(a) A chest X-ray image. (b) Result of Butterworth highpass filtering. (c) Result of high-frequency emphasis filtering. (d) Result of performing histogram equalization on (c). (Original image courtesy Dr. Thomas R. Gest, Division of Anatomical Sciences, University of Michigan Medical School.)

18

1.4 彩色模式的轉換

- 彩色影像模式：

(1) RGB (red, green, blue) model — useful for hardware, e.g., color monitors，TV camera，etc.
(2) CMY or CMYK (cyan, magenta, yellow, black) model — useful for color printers.
(3) YIQ (luminance, inphase, quadrature) model — useful for color CRT TV broadcasting, defined by National Television Systems Committee, i.e., **NTSC**.
(4) CIE XYZ or CIE L*a*b* model –useful for monitor or printer design.
(5) HSV (hue, saturation, value) model — useful color image manipulation.
(6) YUV and YCbCr – useful for image compress
(7) HSI (hue, saturation, intensity) model — useful for color image manipulation.

RGB轉換YIQ（電視機模式）

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.528 & 0.311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (1.4.1)$$

其中Y可應用於影像處理。

RGB轉換YIQ（電視機模式）

範例 1.3.1：（R，G，B)=(100, 50, 30)，灰階值=？

解答：

$$Y = 0.299 \times 100 + 0.587 \times 50 + 0.114 \times 30 \cong 63$$

解答完畢

RGB轉換YIQ（電視機模式）

範例 1.3.2： RGB 影像 $I = \begin{bmatrix} (10,20,40) & (40,30,20) \\ (100,150,200) & (50,250,120) \end{bmatrix}$，YIQ 影像=？

解答：

$$Y_{11} = 0.299 \times 10 + 0.587 \times 20 + 0.114 \times 40 = 19.29$$
$$I_{11} = 0.596 \times 10 - 0.275 \times 20 - 0.321 \times 40 = -12.38$$
$$Q_{11} = 0.212 \times 10 - 0.528 \times 20 + 0.311 \times 40 = 4$$

$$I_{YIQ} = \begin{bmatrix} (19,-12,4) & (32,9,-1) \\ (141,-46,4) & (175,-77,-84) \end{bmatrix}$$

解答完畢

RGB彩色影像與高灰階影像Y的關係

彩色Lena影像

轉換的高灰階Lena影像

Lena是1972年花花公子雜誌的11月小姐

23

Lena,影像處理的第一夫人

Lena參與了1997年5月在波士頓舉行的IS&T50週年慶.

24

HSV模式

- RGB與HSV的轉換

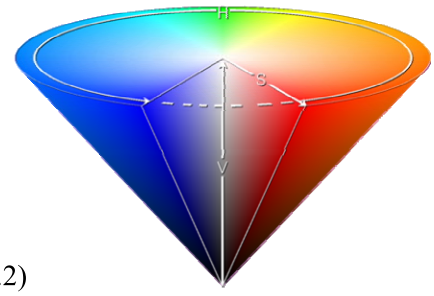
$$H_1 = \cos^{-1}\left\{\frac{0.5[(R-G)+(R-B)]}{\sqrt{(R-G)^2+(R-B)(G-B)}}\right\}$$

$$H = H_1 \ \text{if B} \leq G$$

$$H = 360° - H_1 \ \text{if B} > G$$

$$S = \frac{Max(R,G,B) - Min(R,G,B)}{Max(R,G,B)}$$

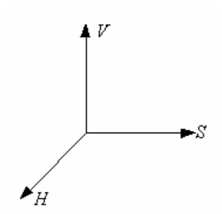
$$V = \frac{Max(R,G,B)}{255} \qquad (1.4.2)$$



- 在HSV系統中，H=0° 代表紅色，H=120° 代表綠色，H=240° 代表藍色。
- S代表該顏色參雜白色的程度。當$S=0$ 時，表示影像為灰階式的影像。
- 當$H=0°$且$S=1$時，影像為紅色。當 $V=0$ 時，表示黑色。反之，當$V=1$ 時，表示白色的亮光。

HSV模式

- HSV系統 (HSB or HIS)



HSV彩色系統

- HSV彩色系統有時也稱作HSB彩色系統，這裡的B代表Brightness。
- HSV有時更被稱作HIS，這裡的I代表Intensity，其實就是灰階值。

YIQ以及YCbCr模式

- YUV轉YIQ：適合影像壓縮傳輸

$$I = -U\sin(33°) + V\cos(33°)$$
$$Q = U\cos(33°) + V\sin(33°)$$

  - Y：影像灰階值的強度,數值是0~255；U、V：影像的彩度
  - 影像壓縮時,用4:1:1比例儲存 或 4:2:1, 4:2:2, 4:4:4
  - 還原時,影像比較不會失真。
- YCbCr (like YUV): 適合影像壓縮傳輸

1) JPEG系統中，第一步輸入RGB彩色影像。第二步將RGB彩色轉換成 YC_bC_r彩色系統。C_b和C_r可由下式獲得

$$C_b = (B - Y)/2 + 0.5$$
$$C_r = (R - Y)/2 + 0.5 \qquad (1.4.3)$$

2) YC_bC_r 的 C_b 代表“Blue Minus Y (Black and White) ”; C_r代表“Red Minus Y (Black and White)”。

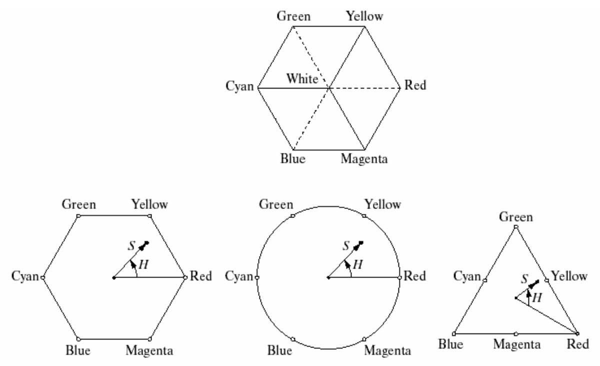
27

HSI模式

H: hue, S: saturation and I: intensity

Advantages

1) I and color information (i.e., H+S) are decoupled observed by eyes
2) Good for human color inspection works and suitable for DIP



28

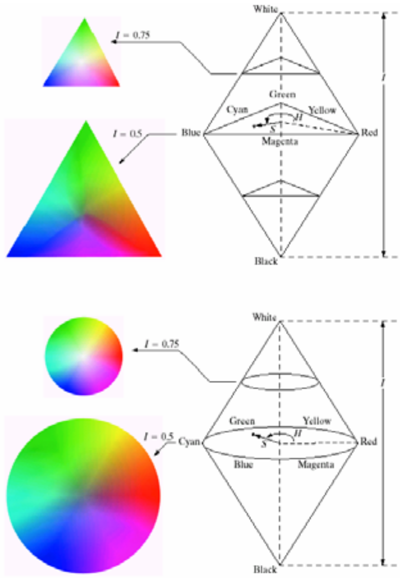
- RGB → HSI

$$H = \begin{cases} \theta & \text{if } B \le G \\ 360 - \theta & \text{if } B > G \end{cases}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{2}\left[(R-G)+(R-B)\right]}{\left[(R-G)^2 + (R-B)(G-B)\right]^{1/2}} \right\}$$

$$S = 1 - \frac{3}{(R+G+B)}\left[\min(R,G,B)\right]$$

$$I = \frac{1}{3}(R+G+B)$$



- HSI → RGB

H in $[0^0, 360^0]$

case 1: *RG* sector ($0^0 \le H < 120^0$)

$B = I\,(1-S)$

$$R = I\left[1 + \frac{S\cos H}{\cos(60^0 - H)}\right]$$

$G = 3I - (R+B)$

case 2: *GB* sector ($120^0 \le H < 240^0$)

$H = H - 120^0$

$R = I\,(1-S)$

$$G = I\left[1 + \frac{S\cos H}{\cos(60^0 - H)}\right]$$

$B = 3I - (R+G)$

case 3: *BR* sector ($240^0 \le H < 360^0$)

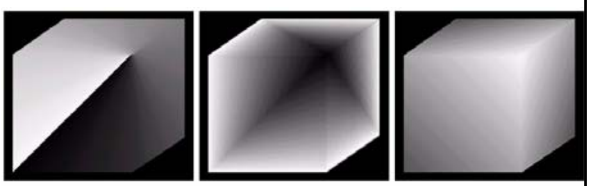
$H = H - 240^0$

$G = I\,(1-S)$

$$B = I\left[1 + \frac{S\cos H}{\cos(60^0 - H)}\right]$$

$R = 3I - (G+B)$

RGB 24-bit color cube



a b c (a) Hue, (b) saturation, and (c) intensity images.

1.5 隱像術（Image Hiding）與浮水印（Watermarking）

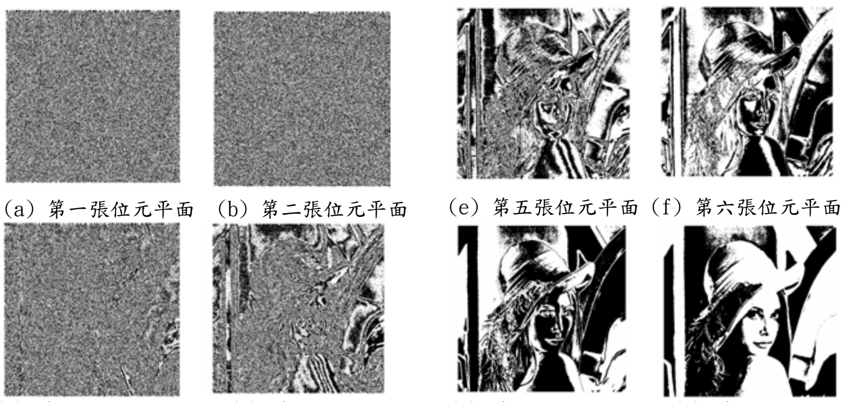
1.5.1 影像的位元平面剖析

- 將RGB分解成R平面、G平面和B平面

（a）R平面　（b）G平面　（a）B平面

圖1.5.1.1　彩色Lena影像的三張分解圖

- 將高灰階Lena影像中的灰階像素分解成八個位元平面



（a）第一張位元平面　（b）第二張位元平面　（e）第五張位元平面　（f）第六張位元平面

（c）第三張位元平面　（d）第四張位元平面　（g）第七張位元平面　（h）第八張位元平面

圖1.5.1.2　高灰階Lena影像的八張分解平面

範例 1.4.1：給一如下的 4×4 子影像，第三張位元平面=？

8	7	6	5
32	31	30	29
10	11	12	13
0	1	2	3

解答：

00001000	00000111	00000110	00000101
00100000	00011111	00011110	00011101
00001010	00001011	00001100	00001101
00000000	00000001	00000010	00000011

第三位元平面：

0	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	0	0	0

解答完畢

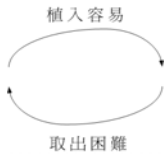
33

- 只將四張圖1.6(e) ~ (h) 疊在一起得到圖1.5.1.3。
- 圖1.5.1.3中的Lena和圖1.4.2中的Lena在肉眼上幾乎分辨不出什麼差異。圖1.6(a) ~ (d) 可存放另1~7張圖。

圖1.5.1.3
(圖1.5.1.2(e) ~ (h) 的合成影像)

34

前述的隱像術之優缺點為何?



滿足上圖的函數也叫單程函數(One Way Function)。利用位元平面來植入影像的最大缺點為：一旦經過壓縮後，所植入的影像很容易受到破壞，解壓後所取出的影像常常已遭到很嚴重的破損。

35

1.5.2 影像術基本原理

- 隱像術(Information hiding)

給二張影像A和B，所謂的**隱像術**就是把A影像隱藏在B影像並且讓人無法察覺B影像中藏了A影像。

- PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio)

令B'為將A隱藏在B後的結果。**PSNR** 很常被用來評估B'和B的相似性，PSNR的定義如下

$$PSNR = 10\log_{10}\frac{255^2}{MSE}$$

$$MSE = \frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}(B'(x,y) - B(x,y))^2$$

- 浮水印 (watermarking)

而所謂的**浮水印**，可把A看成標誌(Logo)，通常這個標誌可想成一種版權。

36

■隱像術(Information hiding)

一種SVD (singular value decomposition) 結合 VQ (Vector Quantization) 的隱像術方法已知有一 $N \times N$ 的灰階影像 A，假設A的秩(Rank)為r，則A的SVD可表示為

$$A = U \sum V^t$$

V和U為正交矩陣(Orthogonal Matrix)且 $\sum = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$，其中 $\sigma_1, \sigma_2 ... \sigma_n$ 滿足 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$ 和 $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = ... = \sigma_n = 0$。

這裏 σ_i 等於 $\sqrt{\lambda_i}$，$\lambda_i \geq 0$ 為矩陣$A^t A$的第i個特徵值(Eigenvalue)。

$$A = U \sum V^t = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} \sum_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^t \\ V_2^t \end{pmatrix}$$

$$= U_1 \sum_1 V_1^t$$

37

範例

例如，令 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，則 $A^t A = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$。

$A^t A$ 的特徵值 (Eigenvalues) 為 $\lambda_1 = 16$ 和 $\lambda_2 = 0$。將特徵值開根號，A 的奇異值為 $\sigma_1 = 4$ 和 $\sigma_2 = 0$。特徵值為16的特徵向量為 $V_1 = (1, 1)^t$

而特徵值為0的特徵向量為 $V_2 = (1, -1)^t$，利用這二個特徵向量可建構出

$$V = (V_1, V_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

利用 $AV = U \sum$　　可得 $AV_j = \sigma_j u_j$

所以

$$u_l = \frac{1}{\sigma_1} AV_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

38

範例（cont.）

又由 $AV = U\Sigma$，可得 $A^t U = V\Sigma^t$。利用 $A^t u_j = 0$ 可找出

$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ \ ,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$ 和 $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ \ ,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^t$ 來。所以 A 的SVD可表示為

$$A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

SVD結合VQ對影像進行壓縮

- How to do that?
- 使用SVD即可進行影像壓縮
  - By setting some of the small singular values to zero, the corresponding singular vector can be neglected. This means these parameters, i.e., singular value, corresponding vectors, have no need to be transmitted to the decoder.
  - Performance not good due to floating point representation.

SVD結合VQ對影像進行壓縮（cont.）

- **SVD+VQ?**
  - Again, the smaller singular values and its corresponding singular vectors are set zero and neglected.
  - The singular vectors corresponding to the principle singular values are replaced by some code vector (codeword) in a pre-generated codebook.
  - This means we will transmit the index rather than the vector itself.
  - More efficient for image compression.

41

SVD結合VQ進行Image Hiding

- **How to do that?**
  - *A novel SVD- and VQ-based image hiding scheme*, *by Kuo-Liang Chung et al.*
- **Embedding Image:** EI
- **Cover Image:** CI
- **Combined Image (Stego-Image):** SI
- Larger Singular Values of CI and EI are retained, and then the retained singular values of EI are scale down by a factor so that the scaled singular values are smaller than that of CI.
  - This won't effect the visual quality of cover image, and makes the embedded image visually indistinguishable from the stego-image.

42

Image Hiding Result

圖1.5.2.1(a)為待植入的F16影像，圖1.5.2.1(b) 為將F16植入圖1.4.2後的結果。效果的確蠻好的，畢竟在圖1.5.2.1(b)中，用肉眼實在看不出F16隱藏其中。

(a) 待植入的F16

(b) 將F16植入圖1.4.2後的結果

圖1.5.2.1　隱像後的效果

1.6 人臉的定位應用

1.6.1 型態學

圖1.6.1.1　輸入的影像

圖1.6.1.2　皮膚色所在

- 封閉（Closing）算子
- 開放（Opening）算子

■ 擴張(Dilation)和侵蝕 (Erosion)

令A為待處理的區塊集而B為結構化元素集（Structuring Elements）：

- 擴張運算 $D(A,B) = A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A + b$
- 侵蝕運算 $E(A,B) = A \ominus (-B) = \bigcap_{b \in -B} A + b$

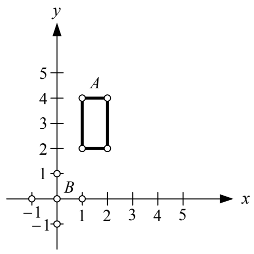


圖1.6.1.3 集合A和B

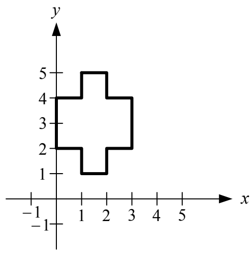


圖1.6.1.4 D(A,B)

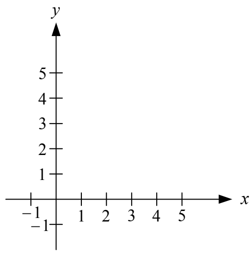
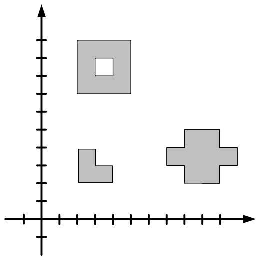


圖1.6.1.5 E(A,B)

曲線的開放與封閉 (Open/Close Curves)

- Open:開放運算子
  - 先侵蝕（erosion） 再擴張（dilation）
  - 表示法 $O(A,B) = A \circ B = D(E(A,B),B)$
- Close: 封閉運算子
  - 先擴張（dilation）再侵蝕（erosion）
  - 表示法 $C(A,B) = A \bullet B = E(D(A,-B),-B)$

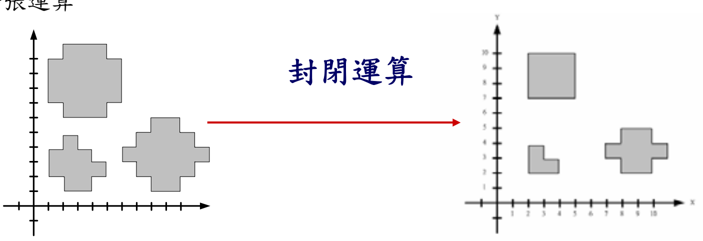
如下圖三區塊集所示，用圖1.6.1.3的結構化元素集B，算出此三區塊集經開放算子及封閉算子運算後的結果。



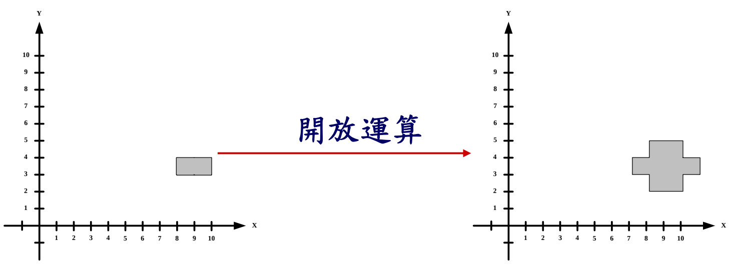
47

結果:

先擴張運算　　　　後侵蝕運算



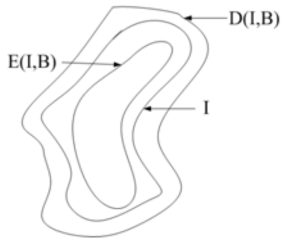
先侵蝕運算　　　　後擴張運算



48

如何利用擴張運算子D和侵蝕運算子E以求得影像中輪廓的外圍？

令 I 代表原影像，而 B 代表結構化元素集。$D(I, B)$ 將影像的輪廓擴張；$E(I, B)$ 將影像的輪廓侵蝕及縮減。因此 $D(I, B)- E(I, B)$ 可得到影像中物體的輪廓外圍，這裏的‘-’代表兩影像相減。

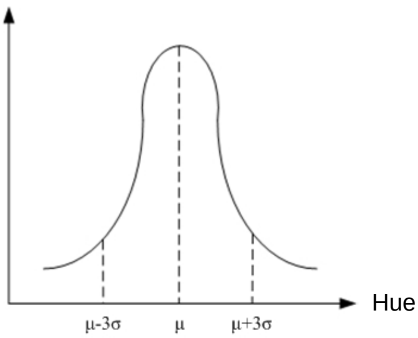


介於D(I,B)和E(I,B)之間的環形區域可視為物體I的輪廓。

49

如何利用色調範圍來過濾皮膚色?

首先利用人工點選的方式，將所有訓練影像中的皮膚色予以框出來，然後將色調抽取出來，統計其平均值 μ 和標準差 σ，並用於濾波器的設計:



50

1.6.2 離散餘弦轉換（Discrete Cosine Transform）

- DCT

令 $f(x,y)$ 為框框內位於(x,y)的灰階值減去128，則**DCT**的計算公式如下

$$D(i,j)=\frac{1}{\sqrt{2N}}C(i)C(j)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\cos\frac{(2y+1)j\pi}{2N} \quad (1.3)$$

$$c(i)=\begin{cases}1/\sqrt{2} & ,i=0\\ 1 & ,otherwise\end{cases} \qquad c(j)=\begin{cases}1/\sqrt{2} & ,j=0\\ 1 & ,otherwise\end{cases}$$

- IDCT

$f(x,y)$也可透過**IDCT**(inverse DCT)得到，公式如下

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}C(i)C(j)D(i,j)\cos\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\cos\frac{(2y+1)j\pi}{2N} \quad (1.4)$$

透過式子(1.4)求得$f(x,y)$後再加上128即可得到位於影像中(x,y)位置的原始灰階值。

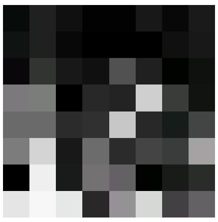
- **DC** (Direct Current、直流值)

$$D(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2N}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos 0\cos 0=\frac{1}{2\sqrt{2N}}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

此處N=8，則

$$D(0,0)=\frac{1}{8}\sum_{x=0}^{7}\sum_{y=0}^{7}f(x,y)$$

- **AC** (Alternative Current、交流值)



20	23	12	5	7	9	22	30
22	32	16	5	8	12	11	23
29	32	16	11	70	30	20	20
100	142	3	45	44	200	50	22
103	120	33	41	200	50	22	70
120	210	22	123	23	70	69	160
12	222	24	126	90	20	6	60
212	252	243	26	149	221	61	90

圖1.6.2.1 8x8的灰階圖案及其灰階值

-521	102	36	52	-23	-147	-46	-57
-294	-96	-14	9	22	80	29	25
-1	38	9	-63	-54	0	31	24
-47	-25	32	-68	73	0	-76	-29
108	21	-2	100	-32	-1	96	37
-55	-15	-25	-1	-36	1	-51	-83
68	-2	36	0	1	-1	53	1
-69	0	-88	-45	55	-46	-49	91

圖1.6.2.2 DCT後的結果

$D(0, 0)$>1000時，原8×8灰階影像為何種影像？
令全黑的灰階值為0，而全白的灰階值為255。已知

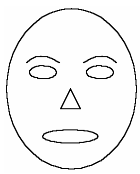
$$D(0,\ 0) = 8\sum_{x=0}^{7}\sum_{y=0}^{7}\frac{1}{64}f(x,\ y) > 1000$$

很容易推知原8×8灰階影像可能為一幾近全白的平滑影像。
不過，有時為保險起見，除了$D(0, 0)$的值外，還得看看其餘的63個值。

圖1.6.2.3為DCT後的頻率域之紋理方向示意圖。通常若框住皮膚色的框框是臉部時，在高頻區會有一些較大的係數表現。當DC值過小時和AC值過大，可進一步判斷有臉部的框框。

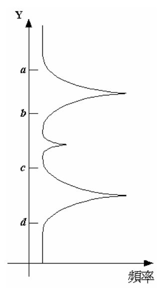
圖1.6.2.3
DCT頻率域的紋理方向示意圖

如何在臉部上找出眼睛和嘴巴的部位？
假設找到的臉部如下所示：



利用水平投射法(Horizontal Projection)

我們可發現在(a, b)和(c, d)兩區間有頻率較高的波峰(Peak)，依位置而言，可合理推估(a, b)區間為眼部所在，而(c, d)區間為嘴巴所在，畢竟這兩個部分的邊點數是較多的。



1.7 影像抽樣原理

1.7.1 傅利葉級數與傅立葉轉換

給一週期函數（Periodic Function） g(θ), $0 \le \theta \le 2\pi$，傅利葉原先的想法是將g(θ)用有正交性（Orthogonality）的傅利葉基底（Basis）來表示。這些正交的基底為 cos θ 、cos2 θ 、Cos3 θ 、…、sin θ 、sin2 θ 、sin3 θ ，$0 \le \theta \le 2\pi$ 。

- 正交性

$$\cos m\theta \cos n\theta = \frac{1}{2}[\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta]$$

當 $m \ne n$時， $\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0$

$m = n \ne 0$時， $\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \pi$

$m = n = 0$時， $\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 2\pi$

55

- 求解傅利葉係數

有了傅利葉基底後，g(θ)可表示成

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta] \quad (1.5)$$

則從

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) \cos m\theta d\theta = \begin{cases} \pi a_m, m \ne 0 \\ \pi a_0, m = 0 \end{cases}$$

可推得

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos m\theta d\theta, m = 0,1,2,...$$

從

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) \sin m\theta d\theta = \pi b_m (m \ne 0)$$

可推得

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin m\theta d\theta, m = 1,2,3,...$$

56

範例（一維傅立葉級數表示法）

令 $g(\theta)=\theta, -\pi<\theta\le\pi$

➔ $a_k=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\cos k\theta d\theta=0$

$b_k=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\sin k\theta d\theta=\dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\theta d(\dfrac{-\cos k\theta}{k})$

$=-\dfrac{2}{k}\cos k\pi=\dfrac{2}{k}(-1)^{k+1}$

➔ $g(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin k\theta$

$=2[\sin\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{1}{3}\sin 3\theta-\dfrac{1}{4}\sin 4\theta+...]$

➔ $S_1=2\sin\theta$　只取第一項

$S_2=2[\sin\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta]$　只取前二項

$S_3=2[\sin\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{1}{3}\sin 3\theta]$　只取前三項

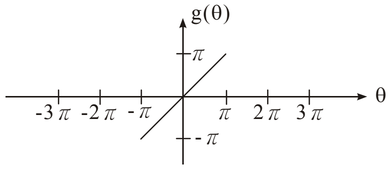


圖1.7.1.1　g(θ)

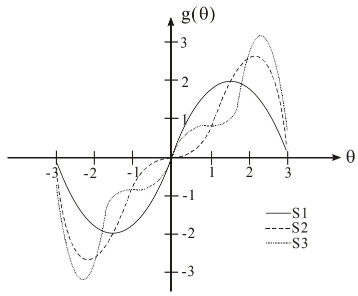


圖1.7.1.2　g(θ)的三個近似圖

- FFT

令 $W_N^i=e^{\frac{2\pi i}{N}i}$ 為1的**基本根**(Primitive Root)且滿足 $W_N^N=1$。若 N=8時，傅利葉矩陣為

$$F_8=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&W^1&W^2&W^3&W^4&W^5&W^6&W^7\\1&W^2&W^4&W^6&1&W^2&W^4&W^6\\1&W^3&W^6&W^1&W^4&W^7&W^2&W^5\\1&W^4&1&W^4&1&W^4&1&W^4\\1&W^5&W^2&W^7&W^4&W^1&W^6&W^3\\1&W^6&W^4&W^2&1&W^6&W^4&W^2\\1&W^7&W^6&W^5&W^4&W^3&W^2&W^1\end{pmatrix}$$

FFT可在 $O(N\log N)$ 時間內完成，首先將 $\bar{X}$ 分成偶半部和奇半部，分別表示成

$$\bar{X}_o=\begin{pmatrix}X_1\\X_3\\X_5\\\vdots\\X_{N-1}\end{pmatrix}\qquad \bar{X}_e=\begin{pmatrix}X_0\\X_2\\X_4\\\vdots\\X_{N-2}\end{pmatrix}$$

令 $\vec{u}=F_{N/2}\vec{X}_e$ 和 $\vec{v}=F_{N/2}\vec{X}_o$ 。利用算出的 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ ，可得

$$y_i=\begin{cases} u_i+W_N^i v_i, & 0\le i<\dfrac{N}{2} \\ u_{i-N/2}+W_N^i v_{i-N/2}, & \dfrac{N}{2}\le i<N \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

當 $0\le i<N/2$

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{0\le j<N} W_N^{ij}X_j \\ &= \sum_{\substack{0\le j<N \\ \text{偶數}j}} W_N^{ij}X_j + \sum_{\substack{0\le j<N \\ \text{奇數}j}} W_N^{ij}X_j \\ &= \sum_{0\le k<N/2} W_N^{2ki}X_{2k} + \sum_{0\le k<N/2} W_N^{i(2k+1)}X_{2k+1} \\ &= \sum_{0\le k<N/2} W_{N/2}^{ik}X_{2k} + W_N^i \sum_{0\le k<N/2} W_{N/2}^{ik}X_{2k+1} \\ &= u_i+W_N^i v_i \end{aligned}$$

當 $N/2\le i<N$

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{0\le k<N/2} W_{N/2}^{ik}X_{2k} + W_N^i \sum_{0\le k<N/2} W_{N/2}^{ik}X_{2k+1} \\ &= \sum_{0\le k<N/2} W_{N/2}^{(i-N/2)k}X_{2k} + W_N^i \sum_{0\le k<N/2} W_{N/2}^{(i-N/2)k}X_{2k+1} \\ &= u_{i-N/2}+W_N^i v_{i-N/2} \end{aligned}$$

利用替代法證明 $T(N)=2T(N/2)+\Theta(N)=O(N\log N)$

已知 $T(N)=2T(N/2)+\Theta(N)$ ，可推得

$$\begin{aligned} T(N) &= 2T(N/2)+\Theta(N) \\ &\le 2T(N/2)+CN \\ &\le 2^2T(N/4)+CN+CN \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\le 2^kT(N/2^k)+CN+\ldots+CN+CN \\ &= 2^kT(N/2^k)+(1+\ldots+1+1)CN \\ &= \frac{N}{2}T(2)+(\log N-1)CN \\ &= \frac{N}{2}+CN\log N-CN \\ &= O(N\log N) \end{aligned}$$

■分開性(Separability)

二維的FT，假設一張影像位於(x,y)的灰階值為$f(x,y)$，則FT定義為

$$F(u,v)=\frac{1}{N\times N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi[\frac{(ux+vy)}{N}]} \quad (1.7)$$

IFT(Inverse FT)依下式求得

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{-j2\pi[\frac{(ux+vy)}{N}]} \quad (1.8)$$

式子(1.7.1.4)可改寫成下列的型式

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}e^{\frac{-j2\pi ux}{N}}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{\frac{-j2\pi vy}{N}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}F(x,v)e^{\frac{-j2\pi ux}{N}} \quad (1.9)$$

式子(1.7.1.5)中$F(x,v)$可看成先對y軸進行FT再對x軸進行FT。(1.1.7.1.5)式顯示的是FT的分開性(Separability) 。

61

假如我們想把FT後的結果從原點(Origin)移到中央(Center)，該如何辦到呢？

ANS：首先將乘上 $(-1)^{x+y}$ ，則 $f(x,y)(-1)^{x+y}$ 的FT如下所算

$$\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)(-1)^{x+y}e^{-j2\pi\left[\frac{(ux+vy)}{N}\right]}$$

$$=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{j\pi(x+y)}e^{-j2\pi\left[\frac{(ux+vy)}{N}\right]}=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{j2\pi\frac{(\frac{N}{2}x+\frac{N}{2}y)}{N}}e^{-j2\pi\left[\frac{(ux+vy)}{N}\right]}$$

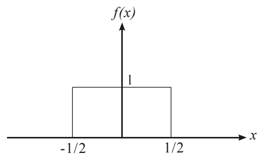
$$=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left[\frac{(u-\frac{N}{2})x+(v-\frac{N}{2})y}{N}\right]}=F(u-\frac{N}{2},v-\frac{N}{2}) \quad (1.10)$$

由$f(x,y)(-1)^{x+y}$的FT等於 $F(u-\frac{N}{2},v-\frac{N}{2})$ ，可得知已將FT的結果從原點移至中央處了。式 (1.10) 顯示了FT的平移性(Translation)。

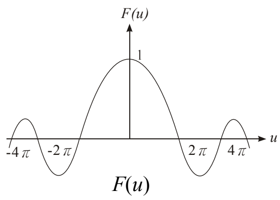
62

- 放大性(Scaling)

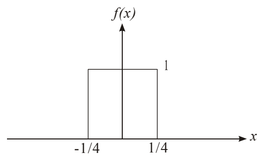
若將 $f(x,y)$ 乘上一個係數C，則 $C\times f(x,y)$ 經FT作用後得到 $CF(u,v)$，這個性質稱作**放大**性質。令 $\alpha x=z$，則 $x=\frac{z}{\alpha}$ 和 $dx=\frac{1}{\alpha}dz$。可推得 $f(\alpha x)$ 和 $\frac{1}{|\alpha|}F(\frac{u}{\beta})$ 為**傅利葉配對**(Fourier Pair)，具有**倒數放大性質**(Reciprocal-Scaling)。



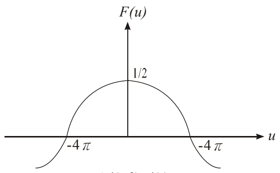
↔



f(x)　　F(u)



↔



f(2x)　　1/2f(u/2)

- 迴積定理(Convolution Theorem)

兩函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的**迴積**定義為

$$f(x)*g(x)=\sum_{m=0}^{N-1}f(m)g(x-m)$$

令

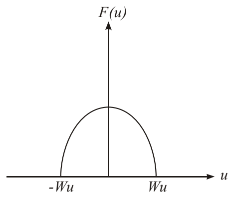
$$z(x)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)g(x-m)$$

則所有 $z(x)$ 經FT作用後得

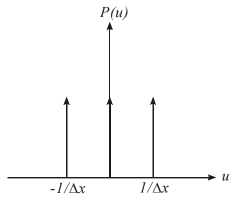
$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}z(x)W^{kx}&=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)g(x-m)W^{kx}\\&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}g(x-m)W^{kx}\\&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)W^{km}\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}g(x)W^{kx}\\&=F(u)G(u)\end{aligned}$$

1.7.2 避免混疊效應

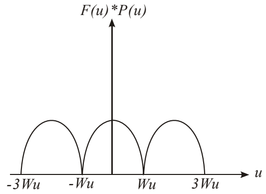
- 取樣間距(Sampling Interval) Δx
  必須滿足 $\Delta x \le \dfrac{1}{2W_u}$，如此才不會造成混疊效應(Aliasing)。



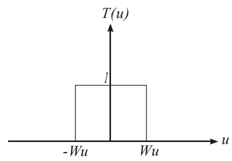
某函數



取樣函數



$F(u)$和$P(u)$進行迴積運算



將$T(u)$乘上$F(u)*P(u)$可得$F(u)$

最後我們來看一個FT的實作結果。給一影像如圖1.7.2.1所示，經FT作用後，其傅利葉頻譜顯示於圖1.7.2.2。

圖1.7.2.1　輸入的影像

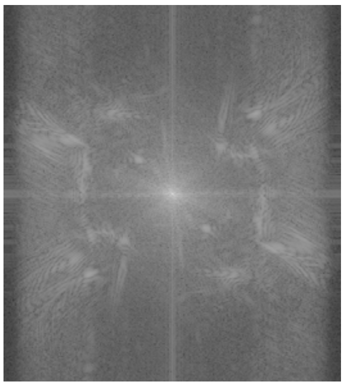


圖1.7.2.2傅利葉頻譜圖